電気計測

はじめに

この文章は、東京工芸大学 システム電子情報学科 1 年生 「電気・電子計測」の授業で使用しているテキストの一部です。「学内限定」扱いになります。御容赦下さい。

このテキストは、完全なものではありません。また、日々更新しております。間違いや気付いたことがありましたら、メール (nisimiya@ee.t-kougei.ac.jp) を頂けると幸いです。

尚、jlatex2html により、html ファイルに変換すると、数式のバックが一部灰色になり若干見にくくなってしまいます。jlatex2html により、勝手についてしまいます。今のところ、原因が分かりません。ご勘弁下さい。

* **2005 年度 1 年生 後期の試験範囲は、第 xxx 章から xxx までです。演習問題は、問 xxx から xxx までです。**

1 計測

1.1 計測の定義

測定 $\rightarrow$ ものの大きさや量を単位量の何倍になるかを求めること。
計測 $\rightarrow$ 測定結果を情報として利用できるようにする。(統計的処理などを施す)

1.2 計測の意義

1. 測定装置と測定技術の設計, 開発, 応用
2. 測定データを解析、解釈して意味ある情報を得る。
3. 測定単位系の確立

1.3 測定法の分類

1.3.1 直接測定法と間接測定法

- 直接測定法 $\rightarrow$ 被測定量を直接測定する.
  (例) ものの長さを物差しで計る. 電流計で電流を計る. など
- 間接測定法 $\rightarrow$ 被測定量と関係のある別の量を測定し, その結果から計算で算出する.
  (例) 抵抗に流れる電流と抵抗にかかる電圧を測定し, 計算によって抵抗値を求める. 電流と電圧から電力を求める. など

1.3.2 偏位法, ゼロ位法, 補償法

1. 偏位法
   $\rightarrow$ 偏位をそのまま測定する
2. ゼロ位法
   $\rightarrow$ 基準量を変化させて差をゼロとする
   (例) 電位差計やブリッジなど
3. 補償法
   $\rightarrow$ 基準量との差を求める (差は必ずしもゼロとしない)
   (例) 標準周波数 f_s と未知の周波数 f_x との差周波 Δf(ビート信号の周波数) を測定し, 未知の周波数 $(f_x = f_s + \Delta f)$ を求める.
   (余談) 柱につけた一昨年の 5 月 5 日のキズの位置と, 子供 a の身長を比較して, その差を求めるのも, 補償法 ??

1.3.3 ディジタル測定法とアナログ測定法

1. ディジタル測定法
   測定値を直接数値で表示
2. アナログ測定法
   指針計の計器などで連続した量で表示

1.4　誤差について

誤差 $\varepsilon = M - T\ rightarrow$ 真の値に対する測定値のずれ
誤差率 $= \varepsilon/T$
補正 $\alpha = -\varepsilon$
ここで、
M : Measurement T : True value

1.5　誤差の原因と対策について

誤差の原因については、一概に特定することはできないが、以下のような原因が考えられる。

1. 個人誤差

   操作ミス、単位系の読み間違い、計算間違い、レンジのミス

2. 測定器の誤差

   ゼロ点の狂い, 計器の姿勢, 自己加熱、

3. 環境による誤差

   周囲温度・湿度の影響、外部磁界の影響

4. ランダム誤差

   熱雑音による抵抗の揺らぎ

誤差をその振舞で分けると「系統誤差」と「偶然誤差」の分けられる。すなわち、「系統誤差」というのは、測定結果に偏りを生じさせる誤差のことであり、「偶然誤差」は系統誤差を除いた後も以前として残る誤差のことである。

1.6　測定の精度について

1.6.1　確度 (正確さ)

かたよりの大きさで判断 (真値からのずれ)。

1.6.2　精度 (精密さ)

ばらつきの大きさで判断 (分散や標準偏差)。

（例）下表の測定例で、電流計 A と電流計 B はどちらが精度が良いか? (平均と分散を求めてみる)

表 1: 二種類の電流計を用いて、5.0 A の電流値を 10 回測定

	1 回	2 回	3 回	4 回	5 回	6 回	7 回	8 回	9 回	10 回	平均
電流計 A	5.5	4.7	4.3	5.6	5.0	5.8	5.7	5.1	4.3	4.8	5.1
電流計 b	5.1	5.0	5.2	5.3	5.1	5.2	5.1	5.1	5.3	5.2	5.2

2　測定データの取り扱いと測定誤差の統計的処理

2.1　測定データの統計的処理について

2.1.1　平均値

測定値、$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の平均値 $\overline{x}$ は、

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \tag{1}$$

2.1.2　分散と標準偏差

標準偏差を σ(分散は σ^2 と表す) とすると、

$$\sigma = \sqrt{\frac{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}{n-1}} \tag{2}$$

ただし、$y_1^2, y_2^2, \cdots, y_n^2$ は、各測定値の平均値からのずれをあらわしている。
一般的に測定回数を多くすれば分散が小さくなる (誤差が小さくなる) が、10 個以上になるとあまり効果がなくなる。

2.1.3　ガウス分布

ランダムな誤差の発生確率は一般的にガウス分布に従う。ガウス分布曲線の式は、以下のように表せる。

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2 x^2) \tag{3}$$

ただし、h は定数である。

2.2　最小二乗法

観測値 y に対する真値 T の差の 2 乗和を最小にする。いま、x, y を測定して、以下の表が得られたとする。

表 2: x に対する y の測定結果

	1 回	2 回	3 回	$\cdots$	n 回
x の値	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y の値	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

いま仮に、x と y が以下のように 1 次式で表すことができるとする。

$$y = ax + b \tag{4}$$

この式の x に $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ を代入して得られる値を $y_1', y_2', y_3', \cdots, '_n$ とすると、

$$\Sigma(y_n - y_n')^2 = \Sigma(y_n - (ax_n + b))^2 \tag{5}$$

が最小になる a と b を求めれば良い。
具体例を以下に示す。式 (5) を具体的に求めると、

$$\begin{aligned} \Sigma\varepsilon_n^2 &\equiv \Sigma(y_n - y_n')^2 = \Sigma(y_n - (ax_n + b))^2 \\ &= (3.6 - (a + b))^2 + (7.2 - (2a + b))^2 + (9.5 - (3a + b))^2 \\ &\quad +(15.5 - (4a + b))^2 + (18.1 - (5a + b))^2 \end{aligned} \tag{6}$$

表 3: 最小 2 乗法の具体例

	1 回	2 回	3 回	4 回	5 回
x の値	1	2	3	4	5
y の値	3.6	7.2	9.5	15.5	18.1

となる。このまま計算するのはチョットしんどい。$\Sigma\varepsilon_n^2$ が最小になる a, b を求めれば良いのだから、 a と b で偏微分した式が 0 になる a, b を求めることとする。

まず、a で偏微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\Sigma\varepsilon_n^2 &= -2(3.6-(a+b))-2\times 2(7.2-(2a+b))-2\times 3(9.5-(3a+b))\\ &\quad -2\times 4(15.5-(4a+b))-2\times 5(18.1-(5a+b))\\ &= 110a+30b-398.0=0 \end{aligned} \tag{7}$$

次に、b で偏微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial b}\Sigma\varepsilon_n^2 &= -2(3.6-(a+b))-2(7.2-(2a+b))-2(9.5-(3a+b))\\ &\quad -2(15.5-(4a+b))-2(18.1-(5a+b))\\ &= 30a+10b-107.8=0 \end{aligned} \tag{8}$$

式 (7), (8) を連立させて解くと、

$$\begin{aligned} a &= 3.73\\ b &= -0.41 \end{aligned}$$

となる。これをグラフ化したものが、図 (1) である。

これらの手順をもう少し、一般化する。表 (2) について、式 (6) の前半部分により、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\Sigma\varepsilon_n^2 &= \frac{\partial}{\partial a}\Sigma(y_n-(ax_n+b))^2\\ &= -2\Sigma x_n(y_n-(ax_n+b))\\ &= -2\Sigma x_n y_n+2a\Sigma x_n^2+2\Sigma x_n b=0 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial b}\Sigma\varepsilon_n^2 &= \frac{\partial}{\partial b}\Sigma(y_n-(ax_n+b))^2\\ &= -2\Sigma(y_n-(ax_n+b))\\ &= -2\Sigma y_n+2a\Sigma x_n+2nb=0 \end{aligned} \tag{10}$$

行列式の形で表せば、

$$\begin{bmatrix} 2\Sigma x_n^2 & 2\Sigma x_n \\ 2\Sigma x_n & 2n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\Sigma x_n y_n \\ 2\Sigma y_n \end{bmatrix} \tag{11}$$

したがって、

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\Sigma x_n^2 & -2x_n \\ 2\Sigma x_n & -2n \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2\Sigma x_n y_n \\ 2\Sigma y_n \end{bmatrix} \tag{12}$$

(練習問題)

以下の表において、$y=ax^2+bx+c$ の関係がある時、最小 2 乗法により a, b, c を求めよ。

(解答)

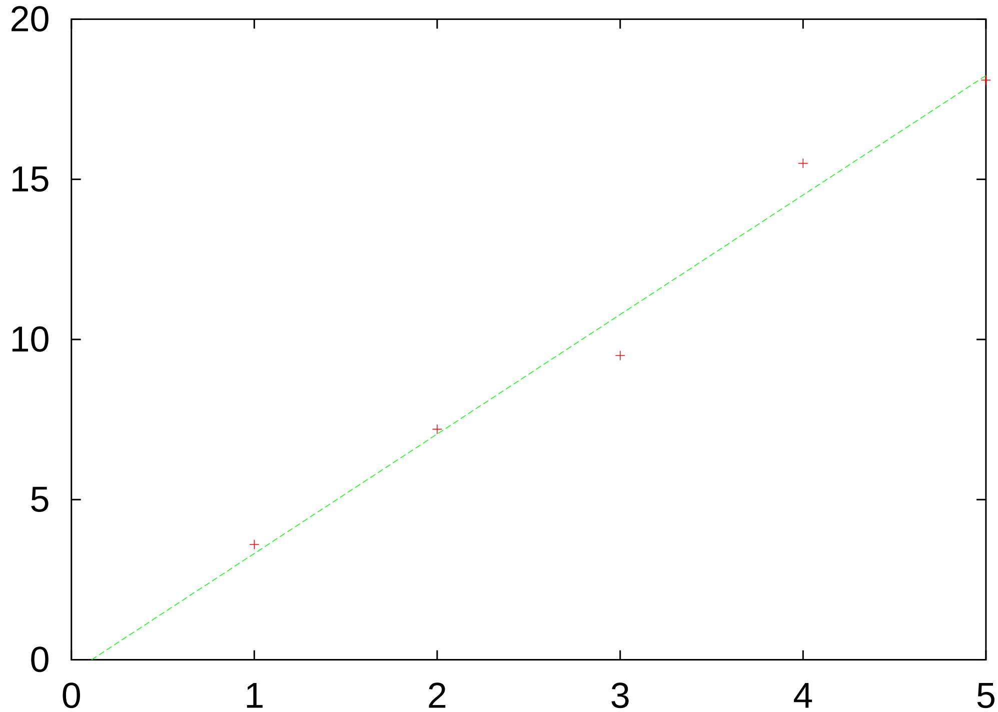


図 1: $y = ax + b$ のグラフに Fit させた例

表 4: 最小 2 乗法の練習問題

	1 回	2 回	3 回	4 回	5 回
x の値	1.0	2.2	2.9	4.1	5.0
y の値	2.0	5.2	10.5	17.0	27.5

与えられた式に適合するように一般化して求める。すなわち、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a}\Sigma\varepsilon_n^2 &= \frac{\partial}{\partial a}\Sigma(y_n-(ax_n^2+bx_n+c))^2 \\
&= -2\Sigma x_n^2(y_n-(ax_n^2+bx_n+c)) \\
&= -2\Sigma x_n^2 y_n + 2a\Sigma x_n^4 + 2b\Sigma x_n^3 + 2c\Sigma x_n^2 = 0 \qquad (13) \\
\frac{\partial}{\partial b}\Sigma\varepsilon_n^2 &= \frac{\partial}{\partial b}\Sigma(y_n-(ax_n^2+bx_n+c))^2 \\
&= -2\Sigma x_n(y_n-(ax_n^2+bx_n+c)) \\
&= -2\Sigma x_n y_n + 2a\Sigma x_n^3 + 2b\Sigma x_n^2 + 2c\Sigma x_n = 0 \qquad (14) \\
\frac{\partial}{\partial c}\Sigma\varepsilon_n^2 &= \frac{\partial}{\partial c}\Sigma(y_n-(ax_n^2+bx_n+c))^2 \\
&= -2\Sigma(y_n-(ax_n^2+bx_n+c)) \\
&= -2\Sigma y_n + 2a\Sigma x_n^2 + 2b\Sigma x_n + 2cn = 0 \qquad (15)
\end{aligned}$$

行列式の形で表せば、

$$\begin{bmatrix} 2\Sigma x_n^4 & 2\Sigma x_n^3 & 2\Sigma x_n^2 \\ 2\Sigma x_n^3 & 2\Sigma x_n^2 & 2\Sigma x_n \\ 2\Sigma x_n^2 & 2\Sigma x_n & 2n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Sigma x_n^2 y_n \\ 2\Sigma x_n y_n \\ 2\Sigma y_n \end{bmatrix} \qquad (16)$$

したがって、

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Sigma x_n^4 & 2\Sigma x_n^3 & 2\Sigma x_n^2 \\ 2\Sigma x_n^3 & 2\Sigma x_n^2 & 2\Sigma x_n \\ 2\Sigma x_n^2 & 2\Sigma x_n & 2n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2\Sigma x_n^2 y_n \\ 2\Sigma x_n y_n \\ 2\Sigma y_n \end{bmatrix} \qquad (17)$$

2.3 誤差伝搬の法則

測定値の誤差が、最後の結果にどのような影響をおよぼすか。

(1) 求める量が、２つの量 x_1, x_2 の和 (または差) で表せるとき

$$y = x_1 + x_2 \qquad (18)$$

実際には誤差を考慮すると、

$$y + \Delta y = (x_1 + \Delta x_1) + (x_2 + \Delta x_2) \qquad (19)$$

したがって、 $$\Delta y = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| \qquad (20)$$

誤差は和の形で伝搬する。

(例題) A 君の体重は 58 ± 2 kg、 B 君の体重は 75 ± 3.5 kg であった。

A 君と B 君を合わせた体重の誤差と相対誤差を求めよ。

(2) 求める量が、２つの量 x_1, x_2 の積で表せるとき

$$y = x_1 \times x_2 \qquad (21)$$

実際には誤差を考慮すると、

$$\begin{aligned}
y + \Delta y &= (x_1 + \Delta x_1) \times (x_2 + \Delta x_2) \\
&= x_1 x_2 + x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1 + \Delta x_1 \Delta x_2 \qquad (22)
\end{aligned}$$

したがって、 $$\begin{aligned}
\Delta y &= |x_1 \Delta x_2| + |x_2 \Delta x_1| + |\Delta x_1 \Delta x_2| \\
&\simeq |x_1 \Delta x_2| + |x_2 \Delta x_1| \qquad (23)
\end{aligned}$$

(例題) 電圧 V と電流 I を測定したところ、$V = 100 \pm 0.5$ V, $I = 20 \pm 0.1$ A であった。電力の誤差と相対誤差を求めよ。

(解答)

$$\begin{aligned} P &= (100 \pm 0.5)(20 \pm 0.1) \\ &= 2000 + 100 \times (\pm 0.1) + 20 \times (\pm 0.5) + (\pm 0.5)(\pm 0.1) \\ \Delta P &\simeq \pm|(\pm 10)| + |(\pm 10)| \\ &= 2000 \pm 20 \end{aligned} \tag{24}$$

電力の誤差は, 40 w で, 相対誤差は $40/2000 = 2$ %.

(3) 求める量が、２つの量 x_1, x_2 の商で表せるとき

$$y = \frac{x_1}{x_2} \tag{25}$$

実際には誤差を考慮すると、

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= \frac{(x_1 + \Delta x_1)}{(x_2 + \Delta x_2)} \\ &= \frac{x_1(1 + \frac{\Delta x_1}{x_1})}{x_2(1 + \frac{\Delta x_2}{x_2})} && (26) \\ &\simeq \frac{x_1}{x_2}\left\{1 + \frac{\Delta x_1}{x_1}\right\}\left\{1 - \frac{\Delta x_2}{x_2}\right\} && (27) \\ &\simeq \frac{x_1}{x_2}\left\{1 + \left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right|\right\} && (28) \end{aligned}$$

したがって、
$$\Delta y = \left|\frac{x_1}{x_2}\right|\left\{\left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right|\right\} \tag{29}$$

(例題) 6 % の誤差を持つ 25 Ω の抵抗に 150 ± 3 V の電圧を印加した. 流れている電流の誤差と相対誤差を求めよ.

(解答) 25 Ω の 6 %は 1.5 Ω であるので,

$$\begin{aligned} I &= \frac{150 \pm 3}{25 \pm 1.5} \\ &= \frac{150}{25}\left\{1 \pm \left(\frac{3}{150} + \frac{1.5}{25}\right)\right\} \\ &= 6.0 \pm 0.48 \end{aligned} \tag{30}$$

2.4 四捨五入についてのルール

四捨五入する数字が正確に 5 の場合は, そのうえのけたが偶数になるように繰り上げるか切り捨てる.
例えば, 23.5 のとき小数点以下を四捨五入すれば 24 になる.
26.5 のときは小数点以下を四捨五入すれば 26 になる.

2.5 有効数字について

32500 などと書くと有効数字が明確にならない. 3.25×10^4 などと書く.

2.6　近似法

2.7　デシベル表示

2.7.1　電力利得について

ある装置 (回路) への入力電力を P_{in}, 出力電力を P_{out} とすると電力利得 G は,

$$G = \frac{P_{out}}{P_{in}} \quad [倍] \tag{31}$$

$$= 10\log_{10}\left(\frac{P_{out}}{P_{in}}\right) \quad [dB] \tag{32}$$

[例題]
10 mW の入力電力を 40 W まで増幅した. 電力利得は何 [dB] か.

2.7.2　電圧利得について

ある装置 (回路) への入力電圧を V_{in}, 出力電圧を V_{out} とすると電圧利得 A_v は,

$$A_v = \frac{V_{out}}{V_{in}} \quad [倍] \tag{33}$$

$$= 20\log_{10}\left(\frac{V_{out}}{V_{in}}\right) \quad [dB] \tag{34}$$

[例題]

2.7.3　dBm について

電力 P を $10\log_{10} P$ [dBm] で表した単位. したがって 1mW は 0dBm になる.

$$10\log_{10} 1 = 0 \quad \text{dbm} \tag{35}$$

2.8　SI 単位系について

基本単位を [m], [kg], [s], [A] とした単位系

3　雑音

雑音とは、→ 計測しようとする対象以外の信号

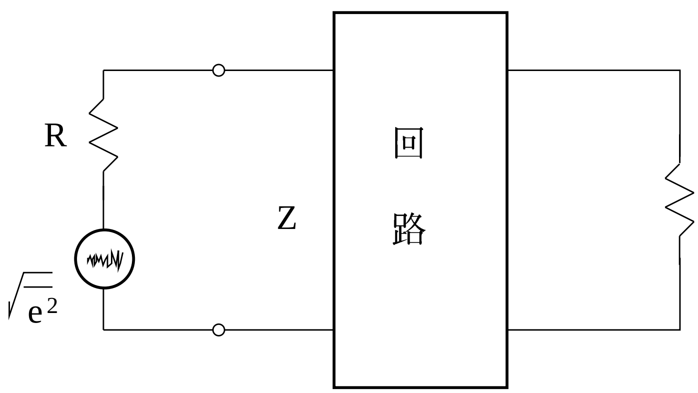
3.1　熱雑音 (ジョンソン雑音, ナイキスト雑音)

電流を運ぶ荷電粒子が、不規則な熱運動をすることによって生じる雑音
生じる雑音電圧の 2 乗平均は

$$\bar{e^2} = 4kTRB \tag{36}$$

T : 絶対温度
R : 抵抗値
k : ボルツマン定数
B : 雑音の周波数バンド幅

[有能入力雑音電力] 図の回路において、回路のインピーダンスを Z とおけば Z で消費される最大雑音電力



Z : 入力インピー　ダンンス

は、(演習 19 参照)

$$P = \frac{\bar{e^2}}{4R} \tag{37}$$

となる。式 (36) を代入すれば、

$$P = \frac{\bar{e^2}}{4R} = kTB \equiv N_i \tag{38}$$

となる。この N_i を有能入力雑音電力という。

3.2　ショット雑音

印加電圧による荷電粒子の変動によって生じる雑音のこと。平均電流が同じでも電子数が揺らいでいるために起る。

3.3　フリッカ雑音 ($1/f$ 雑音)

この雑音のパワースペクトルは周波数に反比例する。これは、抵抗体や半導体デバイスなどで観測されるだけでなく、自然界のあらゆるところ（母親の胎内、風の揺らぎなど）で見られるといわれている。
半導体デバイスでは、半導体内部の結晶界面の不純物によるキャリアの揺らぎが原因と考えられている。

3.4　信号対雑音比 (SN 比)

信号電力 P_s と雑音電力 P_n との比を信号対雑音比 (SN 比) という．一般にデシベルで表すことが多い。

3.5　雑音指数

→ 機器の雑音性能を表す。
入力での SN 比と出力での SN 比の 比を表す。理想的には、1 である。

$$F = \frac{S_i/N_i}{S_o/N_o} \tag{39}$$

3.6　エルゴード性

集合平均と時間平均が等しい場合 エルゴード性がある という。
例えば, 一つの抵抗 R の両端の電圧 V_1 を測定し続け, その時間平均を求めると

$$\overline{V} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T V_1(t)dt \tag{40}$$

となる．また, n 個の抵抗 R_1,R_2, $\cdots$, R_n のある時刻 t_1 における両端の電圧の集合平均は,

$$\langle V \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} V_n(t_1)dt \tag{41}$$

となる．

$$\overline{V} = \langle V \rangle \tag{42}$$

が成立するとき, エルゴード性があるという．

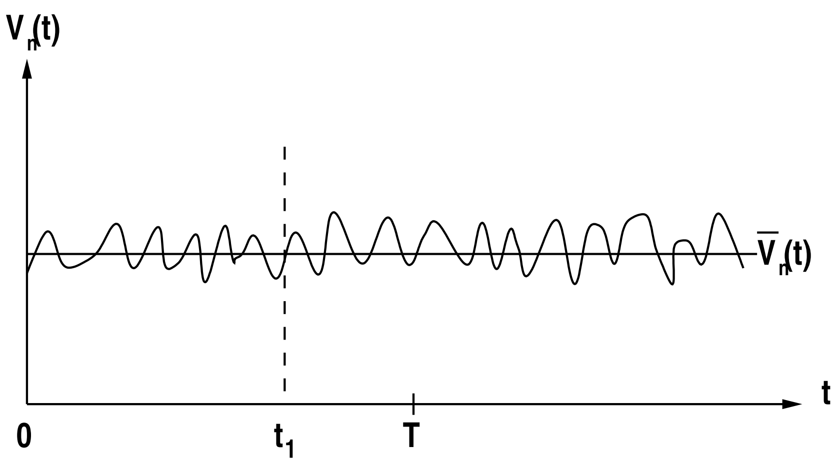


図 2: Noise のゆらぎ

4　電気標準

ここでは電気的な標準については, 電流値, 電圧値, 抵抗値, 周波数などが思い浮かぶ. それ以外思い浮かぶものとして, 長さ, 時間, 質量などがある. 時間は, セシウム原子のある準位間の寿命によって位定義されている. また, 長さは, 時間と光速で決まる. 質量だけは物理定数などを元に決めることができず, フランスにある「キログラム原器」によって決まっている.

4.1　電流標準

今、図のように真空中に 1 m の間隔で平行配置された無限に長い 2 本の導体に逆向きに同じ大きさの電流が流れているとする。長さ 1 m ごとに及ぼし合う力が 2×10^{-7} N である時の電流 を 1 A と定義する。

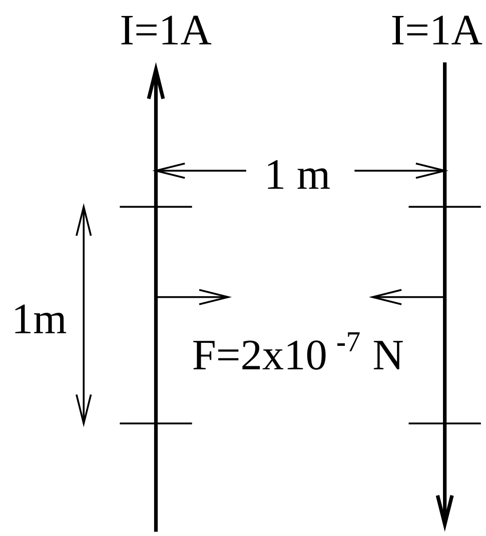


図 3: 1A の定義

4.2　標準抵抗

4.2.1　標準抵抗器

標準抵抗器の条件

- 抵抗値が安定
- 抵抗値の温度係数が小さい
- 銅に対する熱起電力が小さい

マンガニンのある形状の抵抗値を標準としている. (Cu 84%, Mn 12%, Ni 4%)

4.2.2　抵抗量子標準

ホール効果を利用.

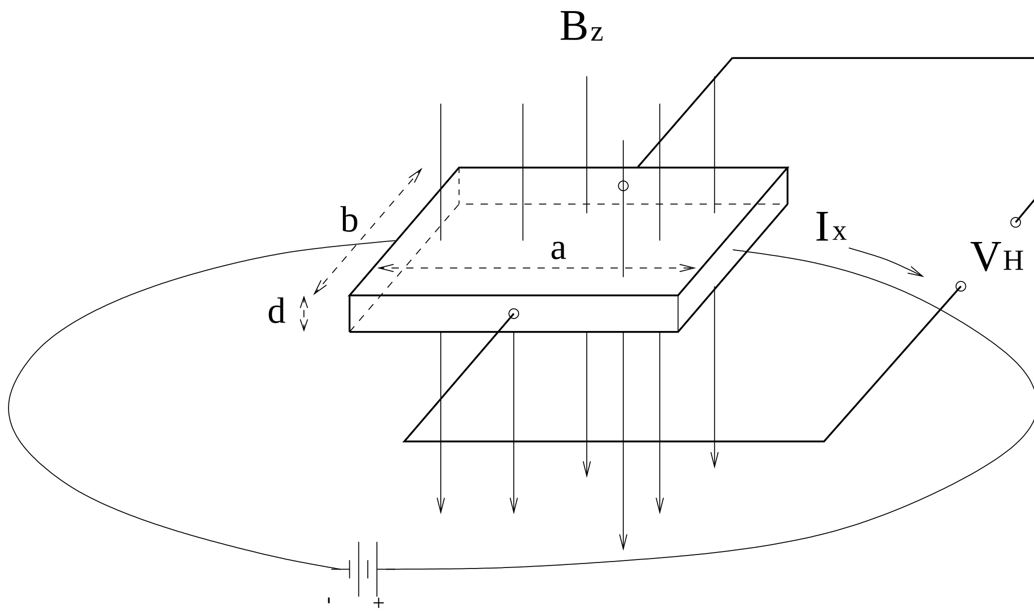


図 4: ホール効果

B_z 方向の強磁場中に 2 次元導体をおき磁場と直角方向に電流 I_x を流す。磁場と電流に直交する電圧 E_y は、

$$Ey = \frac{h}{q^2}\frac{1}{n}I \tag{43}$$

h : プランクの定数

q : 電気素量

$n = 1, 2, 3\cdots$

ホール抵抗 $R_H = \frac{h}{q^2} = 25812.807\ \Omega$ を抵抗量子標準として用いる.

4.3 標準電圧

4.3.1 標準電池

飽和型カドミウム電池 (ウェストン電池ともいう) の 20 ℃における起電力を 1.01864 V と決める。

4.3.2 ジョセフソン素子

図のように、2 つの超伝導体の間に非常に薄い絶縁膜を挟んだとき、電子対が絶縁膜を通り抜ける現象。ジョセフソン素子に交流信号をかけた時、電圧–電流特性をとると電圧がステップ状に変化する。n 番目のステップ電圧を V_n とすると、

$$nf = \frac{2e}{h}Vn$$

ただし、e は電子電荷、h はプランク定数。$\frac{2e}{h}$ は定数であるので、これにより、周波数を測定することにより、電圧を決めることができる。$\frac{2e}{h} = 483597.9$ GHz/V が国際的に勧告されている。

図 5: ジョセフソン素子

4.3.3　ツェナーダイオード

4.3.4　標準電圧発生回路

4.4　周波数標準

5　電圧と電流の測定

5.1　交流波形と測定値

測定電圧の瞬時値を $V(t)$ とすると, 交流波形は

$$V(t) = A \sin \omega t \tag{44}$$

と表すことができる. ここで,

A :振幅
t :時間
ω :角周波数 $(= 2\pi f)$

平均値 V_{av} (Average) と実効値 V_{rms} (Effective Value または、根二乗平均ともいう →Root Mean Aquare) は, 以下のように定義される.

$$V_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T |A \sin \omega t| dt \tag{45}$$

$$V_{rms} = \left\{\frac{1}{T}\int_0^T A^2 \sin^2 \omega t dt\right\}^{1/2} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{\frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2 \omega t dt\right\}^{1/2} \\
&= \left\{\frac{A^2}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\omega t}{2}\right) dt\right\}^{1/2} \\
&= \left\{\frac{A^2}{T}\left(\int_0^T \frac{1}{2}dt - \int_0^T \frac{\cos 2\omega t}{2}dt\right)\right\}^{1/2} \\
&= \left\{\frac{A^2}{T}\left(\left[\frac{1}{2}t\right]_0^T - \left[\frac{\sin 2\omega t}{4}\right]_0^T\right)\right\}^{1/2} \\
&= \left\{\frac{A^2}{T}\left(\frac{T}{2} - 0\right)\right\}^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}A
\end{aligned} \tag{47}$$

正弦波の場合, 波高値 (ピーク値, peak value) と振幅は同じである. 交流電圧の実効値とは, 抵抗器に交流電圧の周期と等しい時間だけ直流電流が流れたときに, その周期中に抵抗器で消費される直流電力に等しい熱損失を抵抗器に発生させる交流電圧である.

5.2　指示電気計器

5.2.1　指示電気計器 (アナログ計器) の精度

日本工業規格 JIS によれば, 0.2 級, 0.5 級, 1.0 級, 1.5 級, 2.5 級 の 5 つに分類されいる. 0.5 級とは, 定格値 (最大の触れ値) に対して 0.5% の誤差を有するということである. 例えば 2.5V の電圧を 1.0 級の電圧計の 3V レンジで測定すれば, 誤差率は

$$3 \times \frac{1.0}{100} \times \frac{1}{2.5} \times 100 = 1.2\% \tag{48}$$

2.5V の電圧を 1.0 級の電圧計の 10V レンジで測定すれば, 誤差率は

$$10 \times \frac{1.0}{100} \times \frac{1}{2.5} \times 100 = 4\% \tag{49}$$

となる. なるべく測定値に近いレンジで読むことが大事になる.

5.3 指示電気計器の構成要素

アナログの計器では, 指示電気計器の 3 要素に「駆動装置」、「制御装置」、「制動装置」が挙げられる. 「駆動装置」は指針を動かすための駆動トルクを発生させる装置. 「制御装置」は指針を元の位置に戻そうとする制御トルクを生ずる装置で, 指針は駆動トルクと制御トルクの釣り合った位置で静止する. 「制動 (Damping)」はブレーキのことで, 制動が働くことにより指針の動きと逆方向の力が働く.

5.4 係数電気計器 (ディジタル計器) の精度

5.5 指示電気計器の動作原理による分類

代表的なのが「可動コイル型」と「可動鉄片型」

5.5.1 可動コイル型計器

平等な磁界中に可動コイルを挿入した形の計器を可動コイル型計器と言う。平等磁界は、永久磁石や別のコイルで作る。

5.5.2 可動鉄片型計器

コイルによって生じた磁界中に鉄片を置くとその鉄片は磁化され力を受ける。その力は、電流の 2 乗に比例する。このコイルと鉄片磁気力を利用したのが、可動鉄片型計器である。

5.6　電流の測定

5.6.1　直流電流の測定

一般的に電流の測定は、電流計を用い以下の図のように接続する。

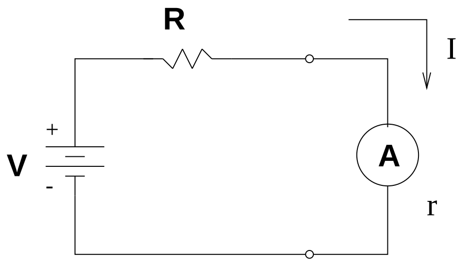


図 6: 直流電流の測定

$$I = \frac{V}{R+r} \tag{50}$$

電流計の測定範囲を変更するには、分流器を用いる。例えば、内部抵抗 $r = 0.1\ \Omega$, 最大測定電流 10mA の電流計を用いて 100 mA, 1 A, 10 A の電流を測定するにはどうすればよいか。

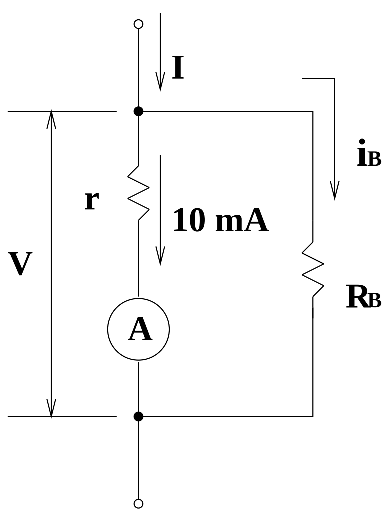


図 7: 分流器

電流計に流すことができる電流値は 10 mA であるので、電流計にかかる最大電圧は $0.1 \times 0.01 = 0.001$ V である。$I = 100$ mA まで測定できるようにするには、$i_B = 90$ mA となるように R_B を決めればよい。したがって、$R_B = 0.001/0.09 = 0.0111\ \Omega$ となる。

同様に、1 A, 10 A のときは、それぞれ、$i_B = 990$ mA $R_B = 0.001/0.99 = 0.00101, \Omega$, $i_B = 9990$ mA $R_B = 0.001/9.99 = 0.0001\ \Omega$ となる。

5.6.2　交流電流の測定

交流電流や交流電圧の測定には、整流器を用い交流を直流に変換する必要がある。整流器には一般的にはダイオードが用いられ、その形式には半波整流型と全波整流型がある。

5.6.3　導体電流の測定

式の導出
等価回路で説明 ⟶ 実際の絵で説明。

5.7　電圧の測定

5.7.1　直流電圧の測定

一般的には稼動コイル計器が用いられ、電圧範囲の拡大には、倍率器を用いる。

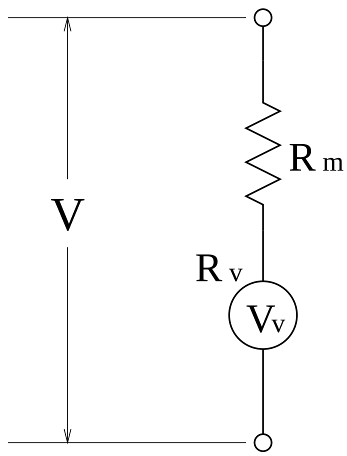


図 8: 直流電圧の測定

倍率器を用いた場合の電圧は、次式となる。

$$v = \left(1 + \frac{R_m}{R_v}\right) V_v \tag{51}$$

5.7.2　交流電圧の測定

pp.92 整流電圧計
電子電圧計
電子電圧計のプローブについて、
ディジタル電圧計 ⟶ 測定電圧を A/D 変換して計数表示する。

5.7.3　高電圧の測定

容量分圧器を使用する。いま、未知の電圧を V_x とする。図の電圧計は、静電電圧計を表す。全容量を C で表すと

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_v}$$

C_1 の電荷と $(C_2 + C_v)$ の電荷は等しい。$Q = CV$ より、

$$C_1 V_1 = (C_2 + C_v) V_2$$
$$V_1 + V_2 = V$$

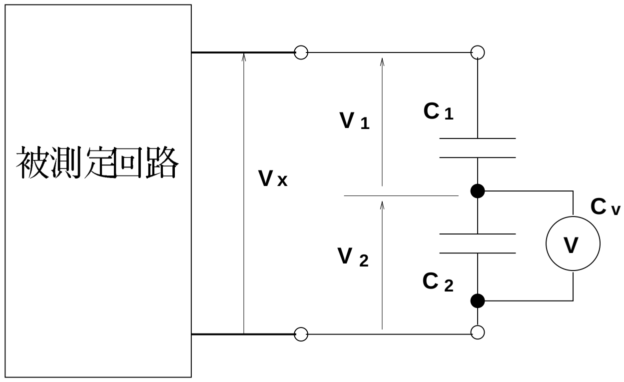


図 9: 量分圧器

したがって、これらを解けば、

$$V_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_v} V \tag{52}$$

となる。

5.7.4 電位差計による測定

電位差計は標準電池の起電力と比較して電圧を正確に測る測定器である。電圧は電圧計によっても測れるが、電圧計はわずかであるが電流を流しながら測定するので、電圧計をつないだことですでに電圧の値が少し変化してしまう。これに対し電位差計は測定回路から電流を取らないで正確に測定する装置である。図 10 におい

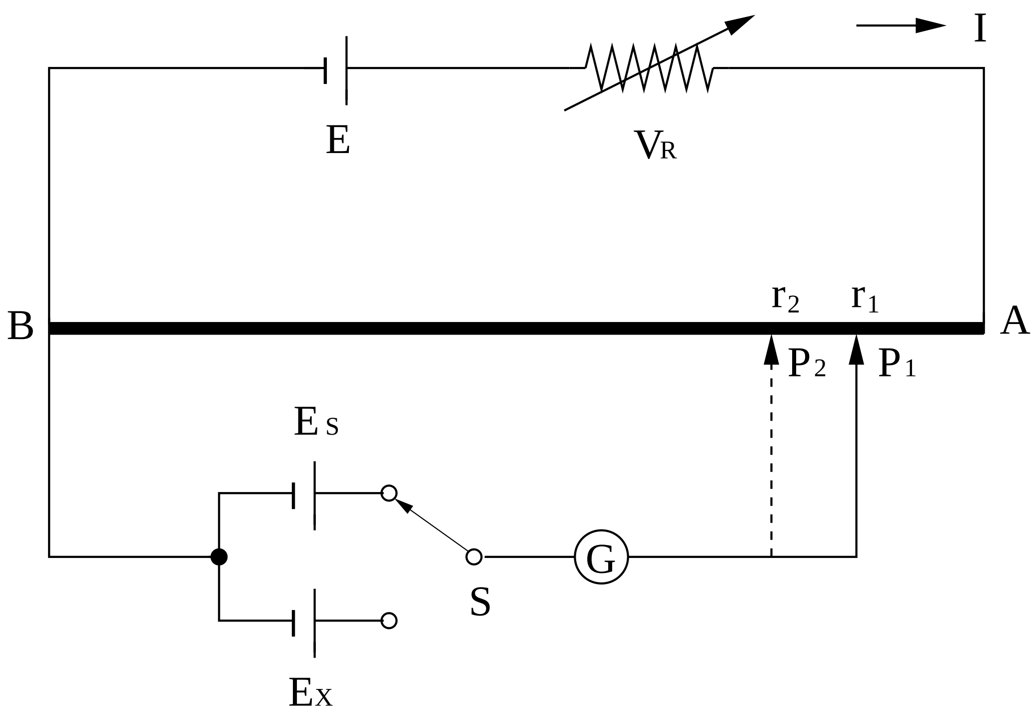


図 10: 電位差計の原理

て、可変抵抗 V_R を調整して、抵抗線 AB に一定電流 I を流しておく。切替スイッチ S を E_S 側に倒し、深

針を移動させて検流計 G に電流が流れないように調整し、P_1 とすると次式が成立する。

$$E_S = I \cdot r_1 \tag{53}$$

但し、r_1 は $\mathrm{B} \cdot \mathrm{P}_1$ 間の抵抗である。次に S を E_X 側に倒し、再び検流計 G に電流が流れないように、深針を移動し、P_2 になったとすれば (54) 式が成立する。

$$E_X = I \cdot r_2 \tag{54}$$

第 (53),(54) 式より E_X を求めると第 (55) 式となる。

$$E_X = \frac{r_2}{r_1} \cdot E_S \tag{55}$$

従って、上式より電流 I を一定に保つことにより基準電圧 E_S が既知ならば、E_X は、抵抗比と E_S で求めることができる。

6　インピーダンスの測定

6.1　抵抗測定

6.1.1　ホイートストンブリッジによる測定

ホイートストンブリッジは抵抗の精密測定に最も広く用いられており、図 12 に示したように、測定電源 (電池) E と零検出器 (検流計) G と最低 4 つの抵抗 (R_a, R_b, R_x, R_s) とからなっている。この抵抗の値を変えて点 N , P 間の電位差を零にし、それを検出器 G で検出する。この平衡状態のもとでは、M , N 間の電圧降下は M , P 間のそれに等しいから、次のようになる。

$$I_{ab}R_a = I_{xs}R_x \tag{56}$$

同様に、

$$I_{ab}R_b = I_{xs}R_s \tag{57}$$

がなりたつ。したがって、

$$\frac{R_a}{R_b} = \frac{R_x}{R_s} \quad \text{または} \quad R_bR_x = R_aR_s \tag{58}$$

となる。3 つの抵抗 R_a , R_b , R_s が既知であれば、未知抵抗 R_x は (58) 式から、

$$R_x = R_s\frac{R_a}{R_b} \tag{59}$$

で与えられる。

すなわち、ホイートストンブリッジによる抵抗の測定は 3 つの既知抵抗によって行なわれ、検出器の特性、目盛には無関係である。検出器は平衡点を検出するのに十分な感度を持っていればよく、その精度で (59) 式が成立する。

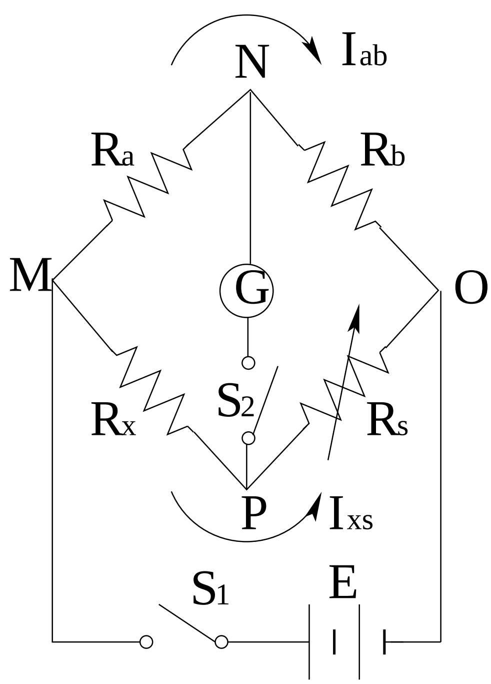


図 11: ホイートストンブリッジ

6.1.2　ホイートストンブリッジによる低抵抗の測定

R_x が低抵抗の時はどうすれば良いか？平衡を保つには R_s の値も小さくなるので、抵抗間の線が持つ抵抗 r も無視できなくなる。そこで、スイッチ K を 1 に入れた場合と、2 に入れた場合の 2 回測定を行なう。

K を 1 に入れた時は、

$$\frac{P}{Q_1} = \frac{R_S}{r + R_X} \tag{60}$$

K を 2 に入れた時は、

$$\frac{P}{Q_2} = \frac{r + R_S}{R_X} \tag{61}$$

と表すことができる。これらより、r を消去すれば、

$$R_X = \frac{P + Q_1}{P + Q_2} \cdot \frac{Q_2}{P} \cdot R_S \tag{62}$$

となる。

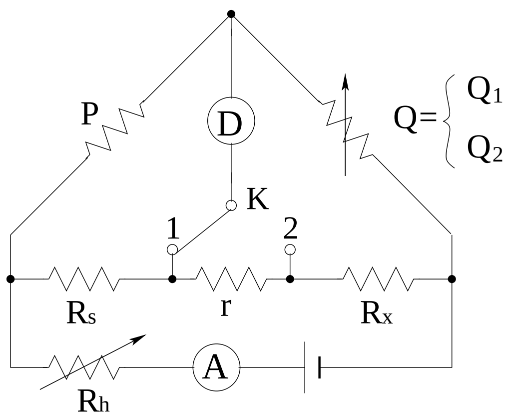


図 12: ホイートストンブリッジによる低抵抗の測定

6.1.3　ダブルブリッジによる測定

ホイートストンブリッジでは平衡を 2 度とる必要があるが、これを改善して 1 度の平衡で測定するようにしたのがダブルブリッジである。

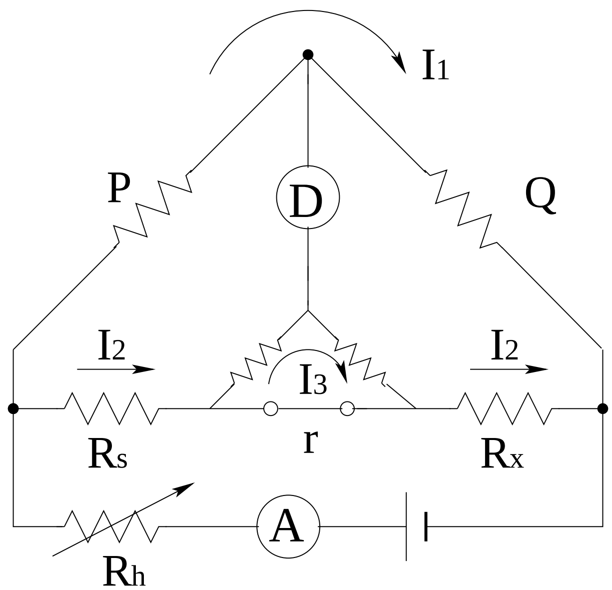


図 13: ダブルブリッジ

6.1.4　高抵抗の測定

6.1.5　交流ブリッジ

6.1.6　LCR メータ

6.2　高周波回路のインピーダンス計測

7　電力, 位相測定

7.1　直流電力測定

7.1.1　間接測定法

間接測定法 ⟶ 電圧と電流を測定し、$P = VI$ で求める。接続の仕方は、2 種類ある。

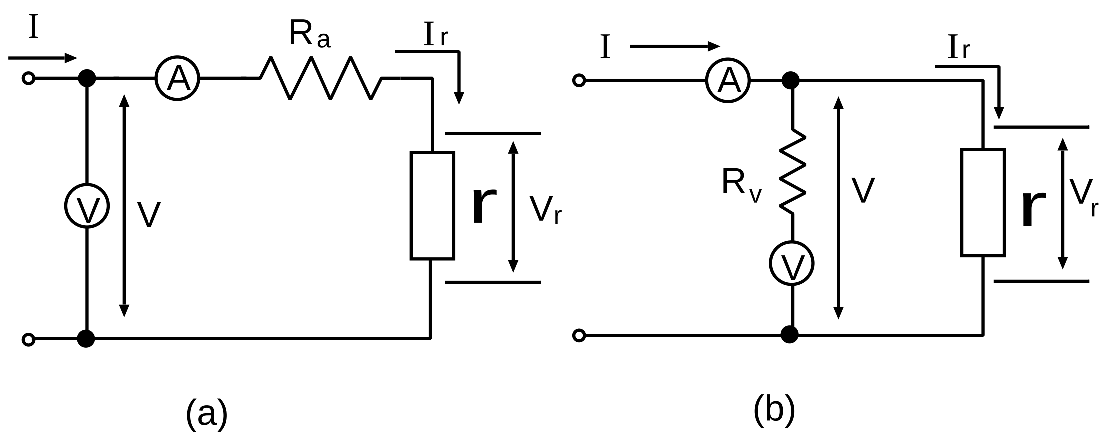


図 14: 消費電力測定のための回路

(a) の場合の消費電力を P_a, (b) の消費電力を P_b とすると、まず、(a) の場合は、

$$\begin{aligned} P &= I_r V_r \\ &= I_r(V - R_a I_r) \\ &= IV - I^2 R_a \end{aligned} \tag{63}$$

となり、$I^2 R_a$ が誤差となる。(b) の場合は、

$$\begin{aligned} P &= I_r V_r \\ &= (I - V/R_v)V_r \\ &= IV - \frac{V^2}{R_v} \end{aligned} \tag{64}$$

となり、$\frac{V^2}{R_v}$ が誤差となる。

7.1.2 直接測定法

電流力計型電力計を用いることにより、直接電力を測定できる。

7.2 交流の電力測定

<u>電圧と電流に位相差がない場合</u>

$$v = v_m \sin \omega t \tag{65}$$

$$i = i_m \sin \omega t \tag{66}$$

の時の瞬時電力は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T vidt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T v_m i_m \sin^2 \omega t dt \\ &= \frac{1}{T} v_m i_m \int_0^T \left[\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\right] dt \\ &= \frac{1}{T} v_m i_m \left[\frac{1}{2}t\right]_0^T \\ &= \frac{1}{2} v_m i_m \\ &= \frac{v_m}{\sqrt{2}}\frac{i_m}{\sqrt{2}} \equiv v_{rms} i_{rms} \end{aligned} \tag{67}$$

<u>電圧と電流の位相差が ϕ の時</u>

$$v = v_m \sin \omega t \tag{68}$$

$$i = i_m \sin(\omega t + \phi) \tag{69}$$

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T}\int_0^T vidt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T v_m i_m \sin\omega t \sin(\omega t+\phi)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T v_m i_m \sin\omega t(\sin\omega t\cos\phi+\cos\omega t\sin\phi) \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T v_m i_m (\sin^2\omega t\cos\phi+\sin\omega t\cos\omega t\sin\phi) \\
&= \frac{v_m i_m}{T}\int_0^T \sin^2\omega t\cos\phi dt+\int_0^T \sin\omega t\cos\omega t\sin\phi dt \\
&= \frac{1}{T}v_m i_m\int_0^T \left[\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\right]dt\cos\phi \\
&= \frac{1}{2}v_m i_m\cos\phi \\
&= \frac{v_m}{\sqrt{2}}\frac{i_m}{\sqrt{2}}\cos\phi \\
&= v_{rms}i_{rms}\cos\phi
\end{aligned}
\tag{70}
$$

有効電力と無効電力

$P = v_{rms}i_{rms}\cos\phi$ [W] を有効電力と言い、抵抗消費分を表している。

また、$Q = v_{rms}i_{rms}\sin\phi$ [Var] を無効電力と言う。無効電力はリアクタンス分で消費される電力で、単位のVar は、Volts amperes reavtive の略。

$S = v_{rms}i_{rms} = \sqrt{P^2+Q^2}$ を皮相電力と言う。

さらに、$\cos\phi$ は、力率と言い、$\cos = P/S$ なる関係が成り立つ。

7.3 3電圧計法の説明

3 個の電圧計の読みと 1 つの既知抵抗から負荷で消費される消費電力 P を求めることができる。

負荷電圧と負荷電流の位相差を ϕ とすると、$\cos\phi$ が力率になる。

電圧と電流の位相関係は図 16 のようになっている考えられるので、交流電力 (有効電力)P は電圧と電流の積に力率をかければ良い。

$$P = V_1 I\cos\phi = V_1\frac{V_2}{R}\cos\phi \tag{71}$$

以下のように力率を求める。図 16 の位相関係より、

$$
\begin{aligned}
V_3^2 &= V_1^2+V_2^2-2V_1V_2\cos(\pi-\phi) \\
&= V_1^2+V_2^2+2V_1V_2\cos\phi
\end{aligned}
\tag{72}
$$

これより、力率を求めることができる。

$$\cos\phi = \frac{V_3^2-V_1^2-V_2^2}{2V_1V_2} \tag{73}$$

式 (71) および (73) より、電力 P は、

$$P = \frac{V_3^2-V_1^2-V_2^2}{2R} \tag{74}$$

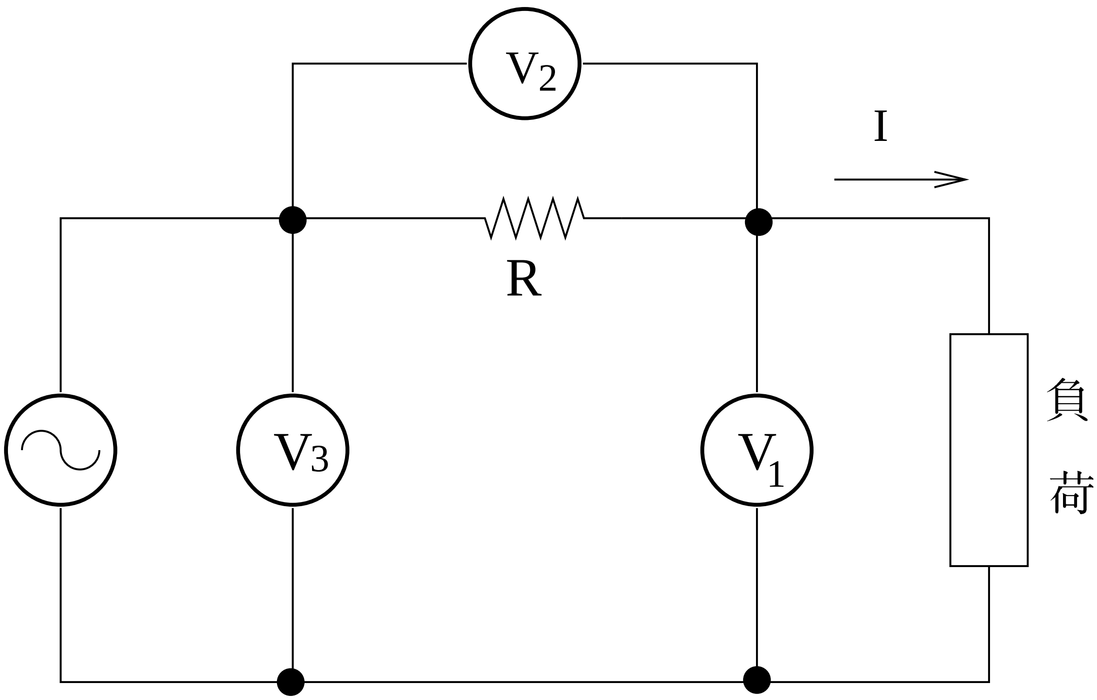


図 15: 3 電圧計法の結線図

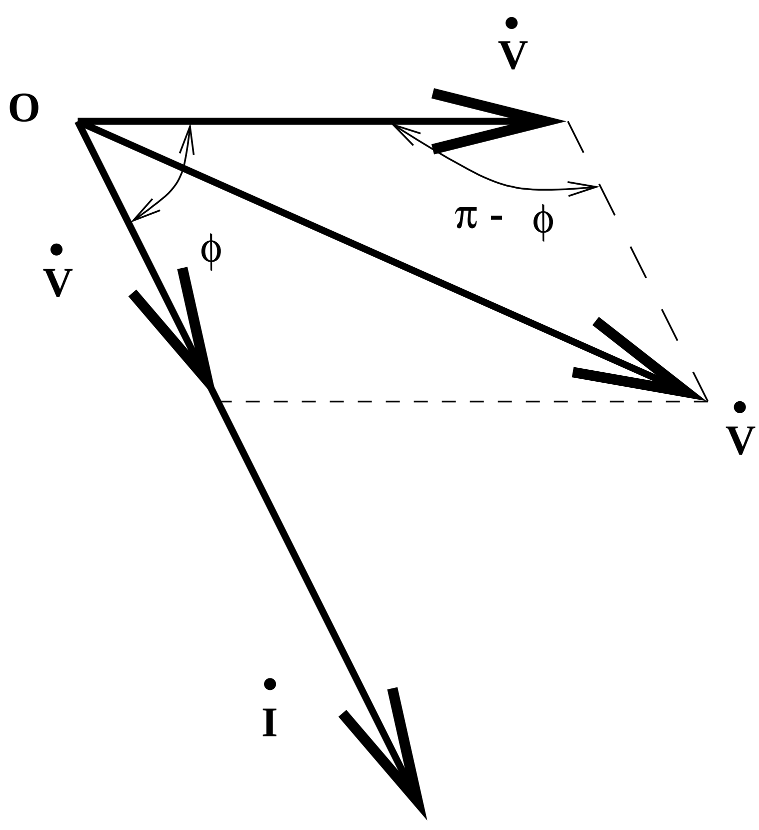


図 16: ベクトル

7.4　3 電流計法の説明

3 電流計法は、宿題。

7.5　多相交流 (3 相交流) のおさらい

7.5.1　対称三相交流の起電力

各相の瞬時値は、

$$v_1 = E_m \sin \omega t \tag{75}$$
$$v_2 = E_m \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \tag{76}$$
$$v_3 = E_m \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \tag{77}$$

と表すことができる。ベクトル表示では、

$$\dot{v}_1 = E \tag{78}$$
$$\dot{v}_2 = Ee^{-j\frac{2}{3}\pi} \tag{79}$$
$$\dot{v}_3 = Ee^{-j\frac{4}{3}\pi} \tag{80}$$

となる。したがって、

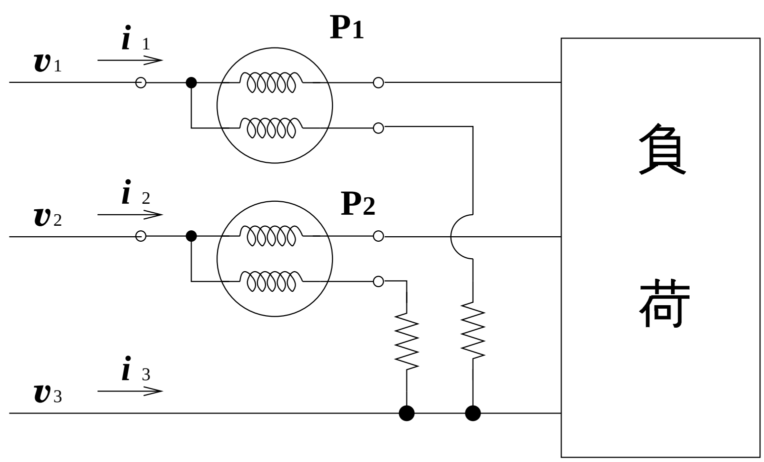


図 17: 三相交流電力測定

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0 \tag{81}$$

が成り立つ。同様に電流に対しても、

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \tag{82}$$

となる。

7.6　対称三相交流の電力測定

電力 P を求めると、

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (i_1 v_1 + i_2 v_2 + i_3 v_3) dt \tag{83}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}\int_0^T (i_1 v_1 + i_2 v_2 + (-i_1 - i_2) v_3) dt && (84)\\
&= \frac{1}{T}\int_0^T i_1(v_1 - v_3) dt + \frac{1}{T}\int_0^T i_2(v_2 - v_3) dt && (85)\\
&= P_1 + P_2 && (86)
\end{aligned}
$$

となる。したがって、図 (17) の様に結線することにより、2 台の単相電力計を用いることにより、三相電力が測定できる。

次に以下のようにして力率を求めることができる。電圧–電流の位相差を ϕ とすると、

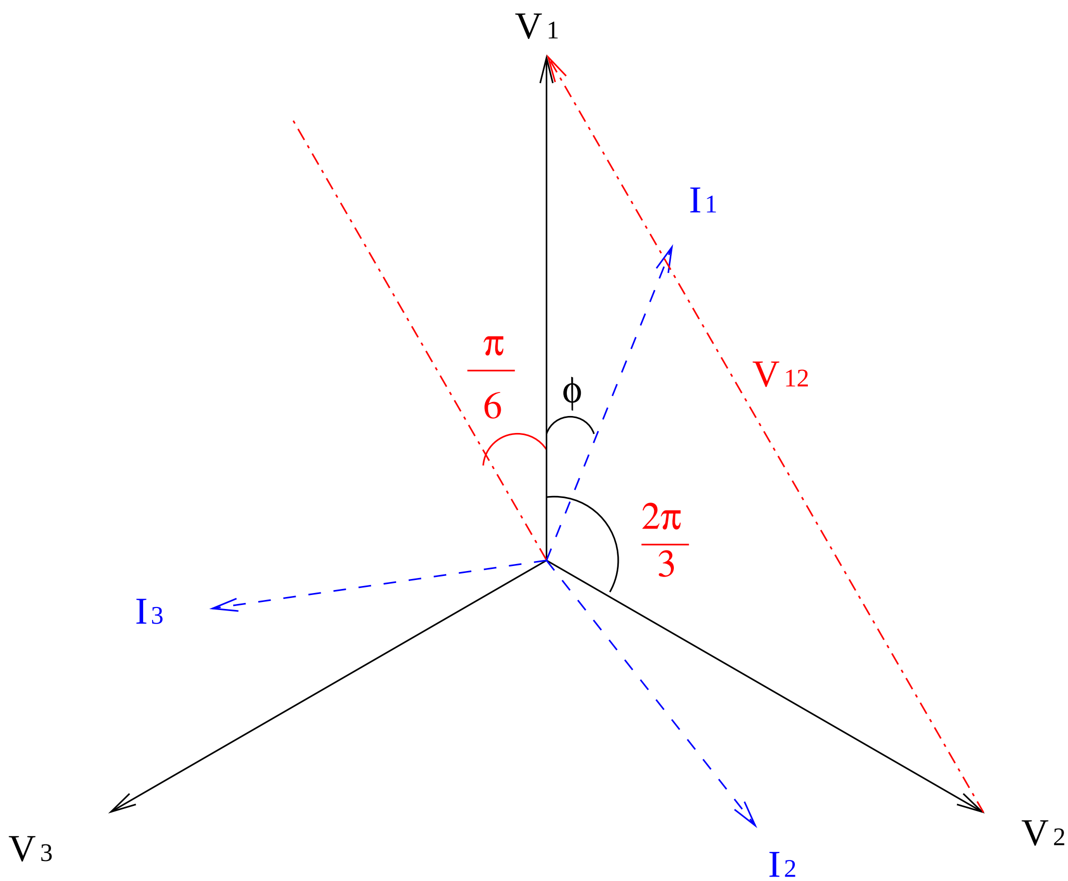


図 18: 三相交流ベクトル図

$$
\begin{aligned}
P_1 &= V_{12} I_1 \cos(\frac{\pi}{6} + \phi) && (87)\\
P_2 &= V_{32} I_3 \cos(\frac{\pi}{6} - \phi) && (88)
\end{aligned}
$$

$P = P_1 + P_2$ より、

$$
\begin{aligned}
P &= P_1 + P_2 && (89)\\
&= IV\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \phi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right)\right\} && (90)\\
&= IV\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\phi - \sin\frac{\pi}{6}\sin\phi + \cos\frac{\phi}{6}(-\phi) - \sin\frac{\pi}{6}\sin(-\phi)\right) && (91)\\
&= IV\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi \times 2\right) && (92)
\end{aligned}
$$

$$= \sqrt{3} I V \cos\phi \tag{93}$$

また、

$$\begin{aligned}
\frac{P_1}{P_2} &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\phi\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}-\phi\right)} &(94)\\
&= \frac{\sqrt{3}/2\cos\phi - 1/2\sin\phi}{\sqrt{3}/2\cos\phi + 1/2\sin\phi} = \frac{\sqrt{3}-\tan\phi}{\sqrt{3}+\tan\phi} &(95)
\end{aligned}$$

$\tan\phi$ を求めると、

$$\begin{aligned}
P_1\sqrt{3} + P_1\tan\phi &= P_2\sqrt{3} - P_2\tan\phi &(96)\\
(P_1+P_2)\tan\phi &= (P_2-P_1)\sqrt{3} &(97)\\
\tan\phi &= \frac{\sqrt{3}(P_1-P_2)}{P_1+P_2} &(98)\\
&= \sqrt{3}\frac{1-\frac{P_1}{P_2}}{\frac{P_1}{P_2}+1} &(99)
\end{aligned}$$

ところで、

8 ホール効果

磁束密度 B_z の磁界中におかれた導体または半導体に電流 I_x を流した場合、電流と垂直な方向に起電力 V_H が生じる。この V_H をホール電圧と言う。これは、磁界中を運動する電荷がローレンツ力を受け、電荷が偏ることにより生じる。n 型半導体と p 型半導体では、発生するホール電圧 V_H の極性が異なる。

キャリアが電子の n 型半導体の時を考える。

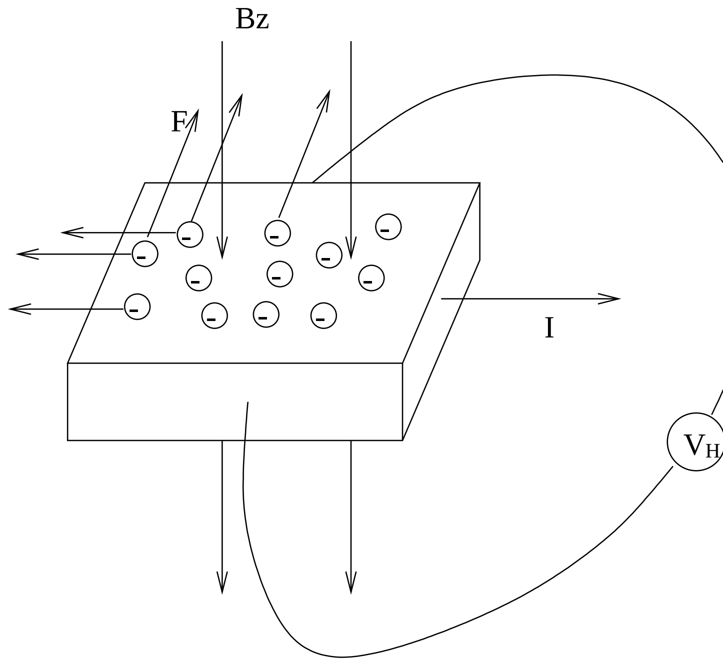


図 19: ホール効果 n 型 (図の奥の電流密度が上がる)

キャリアが電子の p 型半導体の時を考える。

偏った電子、またはホールの空間電荷により生じる電界を E_H とすると、この電界により電荷 q が受ける力 qE_H とローレンツ力による力 qvB_z がつりあう。したがって、

$$qvB_z = qE_H \tag{100}$$

となり、

$$E_H = vB_z \tag{101}$$

となる。ただし、v は、電荷の速度である。また、ホール起電力を V_H とすると、

$$\begin{aligned} V_H &= E_H b && (102) \\ &= vB_z b && (103) \end{aligned}$$

となる。いま、単位体積あたり、電荷の粒子が n 個あるとき、電流 I は、

$$I = qnvbd \tag{104}$$

となるので、ホール電圧 V_H は

$$V_H = \frac{1}{nq}\frac{B_z I}{d} \tag{105}$$

となり、$1/nq$ をホール係数 R_H という。

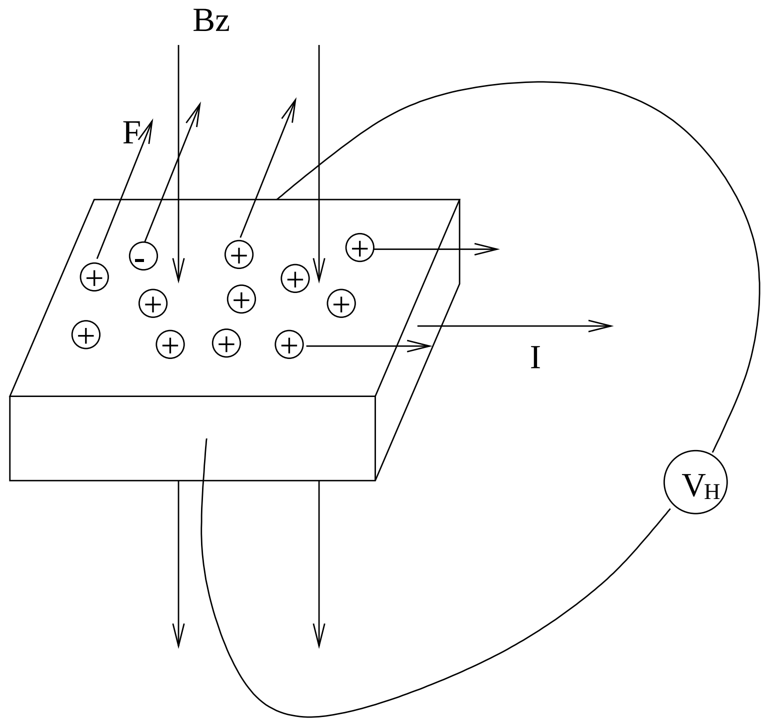


図 20: ホール効果 p 型

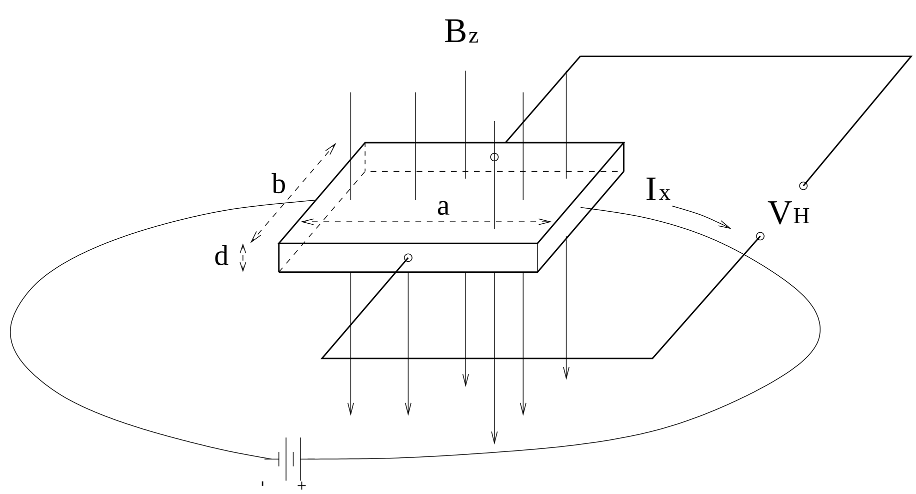


図 21: ホール効果

9　磁束、磁界測定

9.1　電子式磁束計

磁束密度の測定には、電子式磁束計を用いる。サグリコイルの巻数を N、断面積を A とする。さぐりコイル中を通過する磁束 Φ が変化すれば、電磁誘導の法則によりコイルに電圧が生じる。Φ の時間変化を $\frac{d\Phi}{dt}$、生じる電圧を V_1、コイルの巻数を N、磁束密度を B とすると、

$$V_1 = -N\frac{d\Phi}{dt} = -NA\frac{dB}{dt} \tag{106}$$

となる。コ さぐりコイルを電子式磁束計に接続し、その出力は積分される。すなわち、

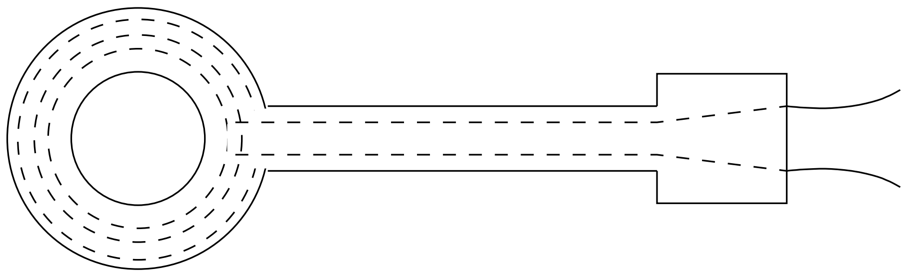


図 22: さぐりコイル

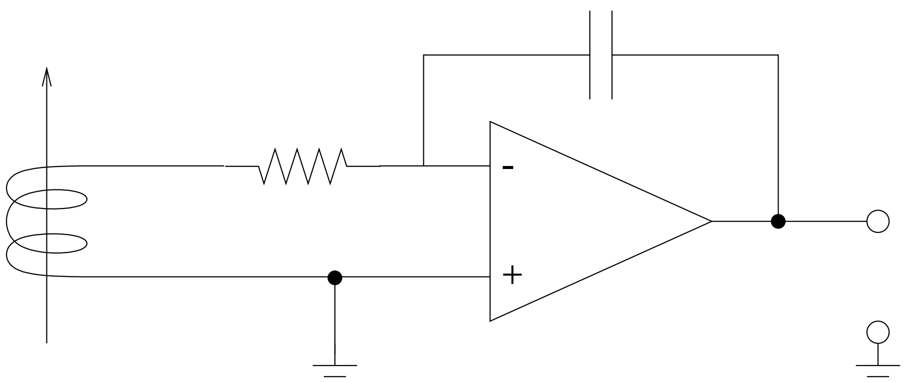


図 23: 磁束計

$$\begin{aligned} V_0 &= -\frac{1}{RC}\int V_1 dt \\ &= -\frac{1}{RC}\int -NA\frac{dB}{dt}dt \\ &= \frac{1}{RC}NAB \end{aligned} \tag{107}$$

したがって、

$$B = \frac{RC}{NA}V_0 \qquad [\mathrm{T}] \tag{108}$$

となる。

9.2　磁化特性の測定

9.2.1　磁化率

図 24: 物質中の磁束密度

　物質中の磁束密度を Bi とおくと

$$\begin{aligned} B_i &= \mu_0\mu_s H && (109)\\ &= \mu_0 H + M && (110)\\ & && (111) \end{aligned}$$

μ_0：真空の透磁率
μ_s：比透磁率
M：磁化の強さ

M が真空中の場合と比較し、増えた分に相当している。

$$\mu_s\mu_0 H = \mu_0 H + M \tag{112}$$

より、

$$M = (\mu_s - 1)\mu_0 H \tag{113}$$

　また、上式より

$$\begin{aligned} \mu_0\mu_s &= \mu_0 + \frac{M}{H} && (114)\\ \frac{M}{H} &\equiv \chi_m && (115) \end{aligned}$$

となり、χ_m を磁化率という。

9.3　環状試料の磁化測定

　図 9.3 のような環状試料の 1 次側に N_1 回、2 次側に N_2 の巻線を施した試料を用意する。1 次側のコイルは、環状試料に磁界をかけるためのコイルであるので、励磁コイルと言う。環状試料の長さを l とすると、励磁コイルにより生じる磁界 H はビオサバールの法則より、

$$H = \frac{N_1 I}{l} \tag{116}$$

となる。2 次側で生じる電圧は、

$$E_1 = -N_2 \frac{d\phi}{dt} \tag{117}$$

積分して

$$\phi = \int -\frac{E_2}{N_2} dt \tag{118}$$

したがって環の断面積を A とおくと磁束密度は

$$B = A\phi = -\frac{1}{AN_2} \int E_2 dt \tag{119}$$

と表すことができる。

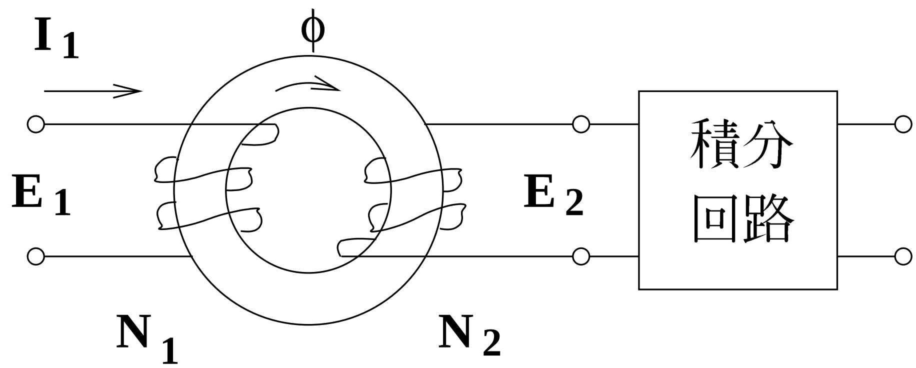


図 25: 環状試料の磁化測定

9.4 オシロスコープを用いた環状試料の磁化測定

図 9.4 には、ヒステリシスループを示す。横軸が磁界、縦軸が磁束密度を示す。それぞれの記号の意味は以

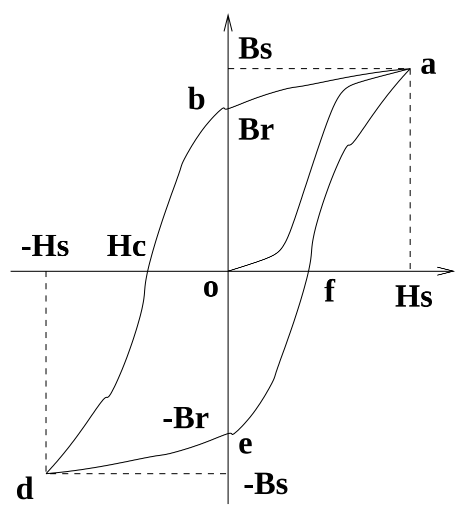


図 26: ヒステリシスループ

下の通りである。

B_s : 飽和磁束密度
B_r : 残留磁束密度
H_s : 飽和磁界の強さ
H_c : 保磁力

以下に、オシロスコープによる交流磁化特性の測定原理を示す。交流電源 (ここではスライダックを使用) に

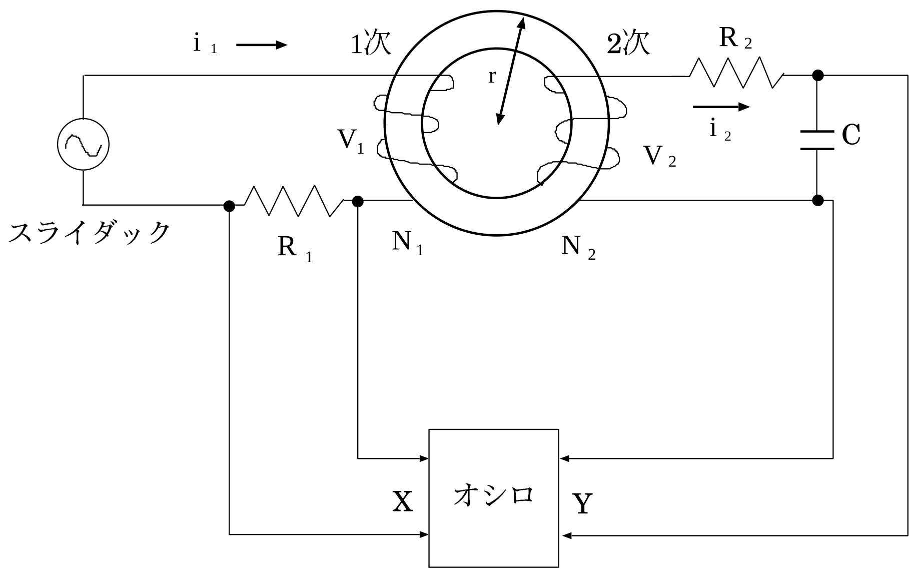


図 27: オシロスコープによる環状試料の磁化測定

より、交流電流を流すと環状試料が磁化される。オシロスコープの x 軸に生じる電圧は、

$$V_x = i_1 \times R_1 \tag{120}$$

となる。環状コイルの半径を r とおくと、1 次側のコイルにより発生する磁界は

$$H = \frac{N_1 i_1}{2\pi r} = \frac{N_1 i_1}{2\pi r}\frac{V_x}{R_1} \tag{121}$$

したがって

$$V_x = \frac{\pi r R_1}{N_1} H \tag{122}$$

となり、H は V_x に比例する。

2 次側の電圧は、

$$V_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} \tag{123}$$

である。2 次側の抵抗とコンデンサで積分回路を構成しており、オシロスコープの y 軸の電圧は、

$$V_y = \frac{1}{CR_2}\int V_2 dt \tag{124}$$

$$= \frac{1}{CR_2} N_2 \int \frac{d\phi}{dt} dt \tag{125}$$

$$= \frac{N_2 \Phi}{C R_2} \tag{126}$$

$$= \frac{N_2 A B}{C R_2} \tag{127}$$

10　オシロスコープの使い方

オシロスコープは、一般的には水平方向である x 軸が時間軸となっており、垂直方向である y 軸は電圧軸となっている。表示画面には、ブラウン管を用いたものと、液晶を用いたものがある。

電圧値の計測には、プローブを用いる。

10.1　プローブの使い方

オシロスコープは、普通入力抵抗 1MΩ 入力静電容量 20 ～ 80 μF を有する。したがって、測定する信号源などの出力インピーダンスが高いと、正確に測定できない。その時には、図 29 のような減衰プローブなどを使用する。この場合は、10:1 の例であるが、100:1 や 1000:1 などもある。

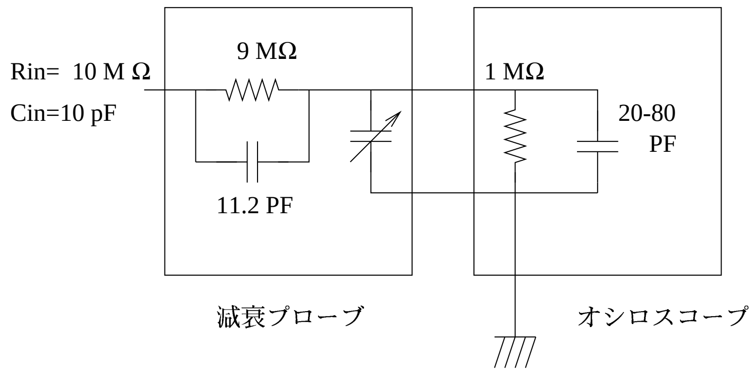


図 28: 10:1 プローブ

10.2　周波数補償について

プローブを使用する前には、必ずプローブ補償を行なう必要がある。

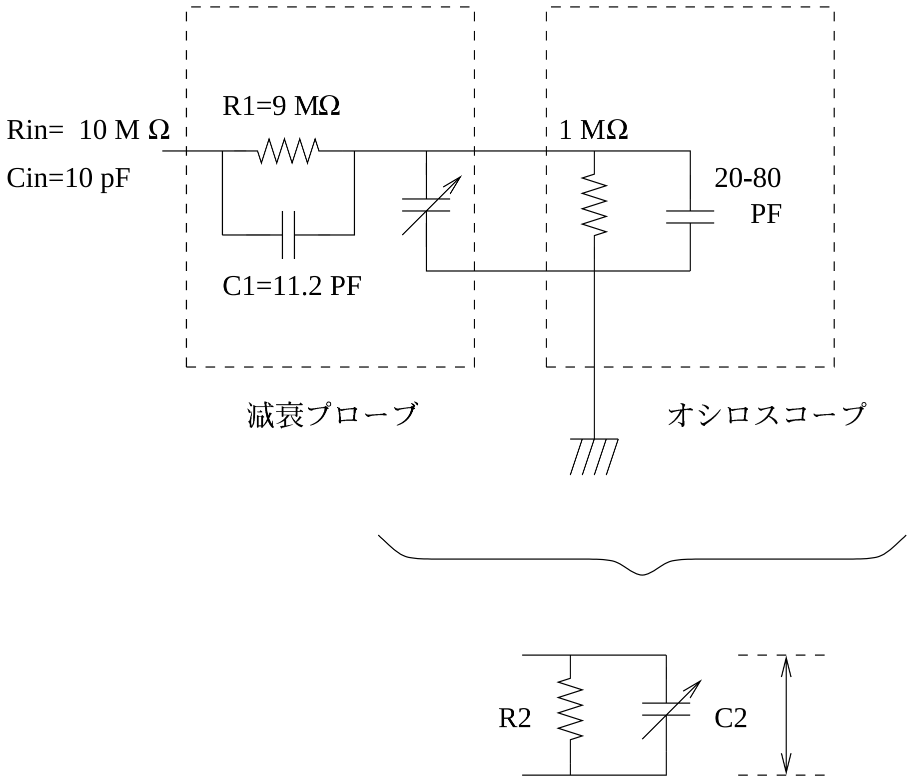


図 29: プローブの補償

10.3 周波数の計測

オシロスコープに以下の波形が表示されているとする。垂直軸がのレンジが 1 V/div であり水平軸のレンジが 1 mS/div である場合、振幅は V_{P-P} で 4V、周期は $T = 6$ mS である。周波数は、$f = 1/T = 1/6 \times 10^3 = 500$ Hz となる。

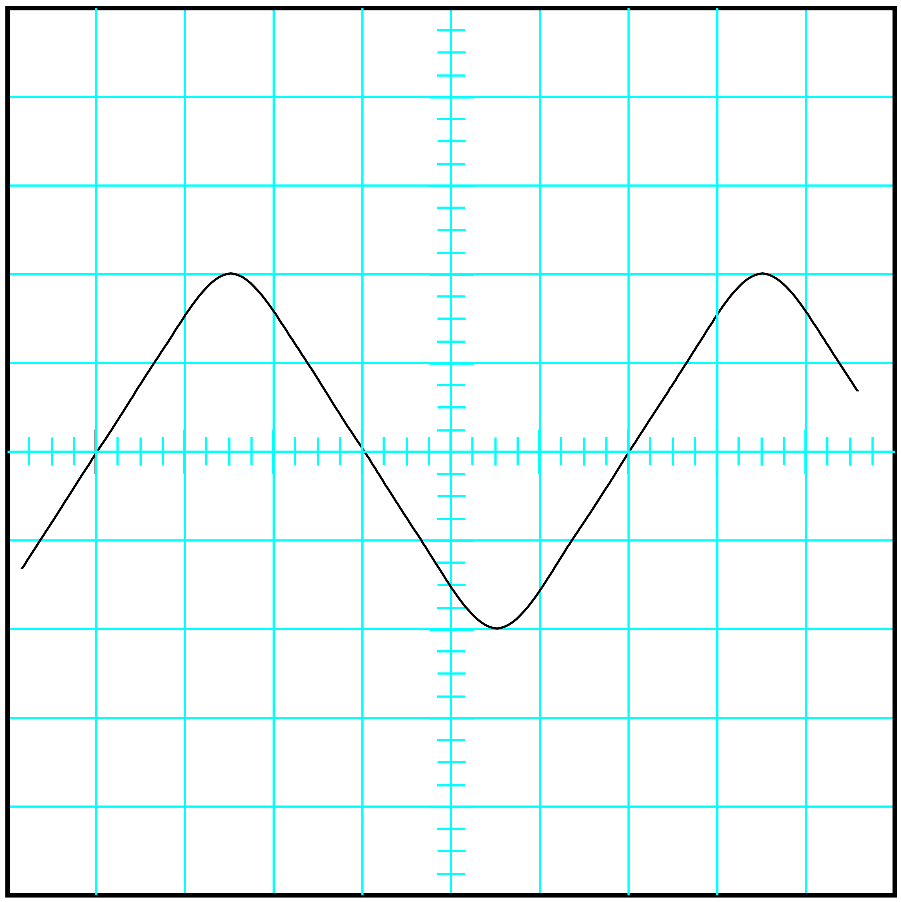


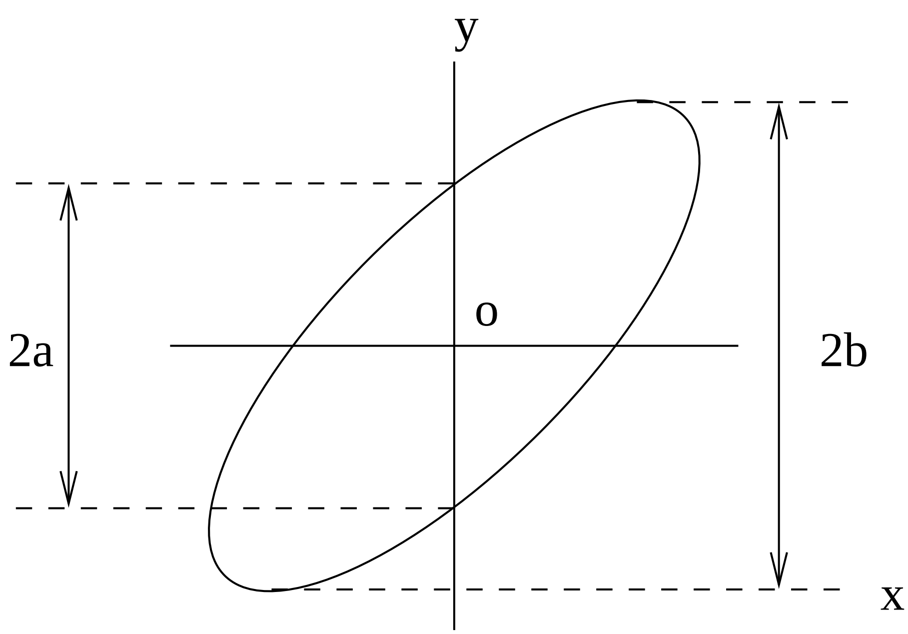
図 30: 周期、周波数、振幅の計測

10.4 位相の計測

２つの正弦波の位相差を検出するには、２現象のオシロスコープを用い、リサージュを表示する。表示されたリサージュ波形が以下の様になった場合、その位相差は、

$$\sin\theta = \frac{a}{b} \tag{128}$$

となる。



11　スペクトラムアナライザ

入力信号の周波数スペクトル分析に利用される。水平軸が周波数で、垂直軸が振幅を表し、

12　周波数分析

周期的な波形は

$$(\text{直流分}) + (\cos \text{波形成分}) + (\sin \text{波形成分})$$

すなわち、

$$\begin{aligned} y(t) &= a_0 + a_1 \cos\omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \cdots \\ &\quad + b_1 \sin\omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \cdots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\omega t \end{aligned} \tag{129}$$

と表すことができる。

a_0, a_n, b_n を以下のようにして求める。

13 演習問題

問–1. 測定と計測の違いを説明せよ。

Ans. 測定とは、ものの大きさや量が、単位量の何倍になるかを求めること。

計測とは、測定結果を情報として利用できるようにすること。

問–2. 直接測定法と間接測定法の違いを実例を挙げてのべよ.

(解答) セクション 1.3.1 を見よ.

問–3. 変位法、補償法、ゼロ位法について述べよ。

問–4. 5.0 V の電圧を 3 種類の電圧計で 5 回ずつ測定したら、表のようになった。以下の問に答えよ。

						平均	標準偏差
電圧計 A (V)	4.5	4.8	4.7	5.0	4.5		
電圧計 B (V)	5.5	5.0	4.8	4.7	5.3		
電圧計 C (V)	5.5	5.4	5.4	5.3	5.6		

(a) それぞれの平均と標準偏差を求め、表を完成させよ。

(b) 最も精度 (精密さ) の良い測定はどの電圧計で行なった場合か。理由も説明せよ。

(c) 確度の一番高いのはどの測定か。理由も説明せよ。

(d) 系統誤差の一番大きいのはどれか。理由も説明せよ。

(解答)

(a) それぞれの平均値を av_1, av_2, av_3 とすると、

$$av_1 = \frac{4.5+4.8+4.7+5.0+4.5}{5} = 4.70 \simeq 4.7$$
$$av_2 = \frac{5.5+5.0+4.8+4.7+5.3}{5} = 5.06 \simeq 5.1$$
$$av_3 = \frac{5.5+5.4+5.4+5.3+5.6}{5} = 5.44 \simeq 5.4$$

となる。

また、それぞれの分散を σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2 とすると、

$$\sigma_1^2 = \frac{(av_1-4.5)^2+(av_1-4.8)^2+(av_1-4.7)^2+(av_1-5.0)^2+(av_1-4.5)^2}{(5-1)} = 0.045$$
$$\sigma_2^2 = \frac{(av_2-5.5)^2+(av_2-5.0)^2+(av_2-4.8)^2+(av_2-4.7)^2+(av_2-5.3)^2}{(5-1)} = 0.113$$
$$\sigma_3^2 = \frac{(av_3-5.5)^2+(av_3-5.4)^2+(av_3-5.4)^2+(av_3-5.3)^2+(av_3-5.6)^2}{(5-1)} = 0.013$$

従って、それぞれのルートを計算し、

$$\sigma_1 = \sqrt{0.045} = 0.2121$$
$$\sigma_2 = \sqrt{0.113} = 0.3361$$
$$\sigma_3 = \sqrt{0.013} = 0.114$$

求めると下表の通り

						平均	標準偏差	分散 (参考)
電圧計 A (V)	4.5	4.8	4.7	5.0	4.5	4.7	0.21	0.045
電圧計 B (V)	5.5	5.0	4.8	4.7	5.3	5.1	0.34	0.11
電圧計 C (V)	5.5	5.4	5.4	5.3	5.6	5.4	0.11	0.013

(b) 電圧計 C で測定した場合が、精度としては最も良い。理由は、標準偏差が一番小さく、従ってバラツキが一番小さいから。

(c) 電圧計 B で測定した場合が、確度が最も高い。理由は、真の値 5.0 V に最も近いから。

(d) 電圧計 C で測定した場合が、系統誤差が最も大きい。理由は、真値との差が最も大きいから。

問–5. 真の値 100 V のとき、測定値が 93 V ととなった。

(a) 誤差

(b) 誤差率

(c) 補正

を求めよ。(解答)

(a) 誤差 $\epsilon = 93 - 100 = -7$ V

(b) 誤差率 $= |\epsilon/T| = |-7/100| = 0.07$

(c) 補正 $\alpha = -\epsilon = 7$ V

問–6. ある回路に 10 V の電圧を加えたとこと、5 A の電流が流れた。電圧値には 3 %の誤差を含み、電流値には 5%の誤差を含んでいるとすると、消費電力には、何 W の誤差を含むか。

(解答)

10 V の電圧に含む誤差は $10 \times 0.03 = 0.3$ V であり、5 A の電圧には $5 \times 0.05 = 2.5$ A の誤差を含んでいる。したがって消費電力は、

$$(10 \pm 0.3)(5 \pm 0.25) \simeq 50 \pm 4$$

したがって、誤差は 4 W.

問–7. 以下の空欄を埋めよ。

観測値 y と真値 T との $\boxed{\text{(1)}}$ の 2 乗和を最小にする。いま、x, y を測定して、以下の表が得られたとする。

表 5: x に対する y の測定結果

	1 回	2 回	3 回	$\cdots$	n 回
x の値	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y の値	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

いま仮に、x と y が以下のように 1 次式で表すことができるとする。

$$y = ax + b \tag{130}$$

この式の x に $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ を代入して得られる値を $y'_1, y'_2, y'_3, \cdots, {}'_n$ とすると、

$$\Sigma(y_n - y'_n)^2 = \Sigma\boxed{\quad\text{(2)}\quad} \tag{131}$$

が最小になる a と b を求めれば良い。

(解答)

(1) 差

(2) $(y_n - (ax_n + b))^2$

問–8. ある測定を行なったところ電圧 x に対する y の値が表のような結果になった。$y = ax + b$ なる関係にあるとき、a, b を最小２乗法を用いて求めよ。

x [V]	0	1	2	3	4
y [A]	1.0	3.0	7.0	8.0	13.0

(解答)

前問参照

問–9. クラス 2.5 の電流計の 10mA レンジを用いて電流を測定したところ、2mA を示した。この時の真の電流は、どの範囲にあるか。また、測定値に対する誤差の割合は何%か。

(解答)

誤差は、$10 \times 0.025 = 0.25$ mA であるので、真の電流値は、2 ± 0.25 mA の範囲にある。また、その誤差の割合は、$0.25/2 * 100 = 12.5$ %.

問–10. ある電圧を、2.5 級の電圧計を用い定格電圧 10V のレンジで測定したら、指針はちょうど 3V を示した。このとき含まれる誤差は何%か。

問–11. 計測では測定をいかに行なうかと同様に測定データの意味ある数字、すなわち有効数字が重要な役割を果たす。以下の四則演算を行なって、有効桁と誤差の範囲を AAAA±BBBB の形式で示せ。

(a) $3.142 + 2.53$

(b) $3.142 - 2.53$

(c) 3.142×2.53

(d) $3.142 \div 2.53$

(解答)

(a) $(3.142 \pm 0.0005) + (2.53 \pm 0.005) = (3.142 + 2.53) \pm (0.0005 + 0.005)$
$= 5.672 \pm 0.0055 = 5.67 \pm 0.006$

(b) $(3.142 \pm 0.0005) - (2.53 \pm 0.005) = (3.142 - 2.53) \pm (0.0005 + 0.005)$
$= 0.612 \pm 0.0055 = 0.61 \pm 0.006$

(c) $(3.142 \pm 0.0005) \times (2.53 \pm 0.005)$
$= (3.142 \times 2.53) \pm (3.142 \times 0.005 + 0.0005 \times 2.53 + 0.0005 \times 0.005)$
$= 7.949 \pm 0.01697 = 7.95 \pm 0.017$

(d) $\dfrac{3.142 \pm 0.0005}{2.53 \pm 0.005} = \dfrac{3.142\left(1 \pm \frac{0.0005}{3.142}\right)}{2.53\left(1 \pm \frac{0.005}{2.53}\right)} = \dfrac{3.142}{2.53}\left(1 \pm \dfrac{0.0005}{3.142}\right)\left(1 \pm \dfrac{0.005}{2.53}\right)$
$= 1.2418(1 \pm 0.00016)(1 \pm 0.00197)$
$\simeq 1.2418(1 \pm (0.00016 \times 1 + 0.00197 \times 1))$
$= 1.2418 \pm 0.002645$
$\simeq 1.24 \pm 0.003$

問–12. ある抵抗にかかる電圧とその抵抗に流れる電流を測定したところ、以下の表のような結果になった。四捨五入して小数点以下第 1 位まで求めよ。

x [V]	0.00	1.05	2.23	3.15	4.11	4.95
x の四捨五入値						
y [A]	1.02	3.05	7.15	8.06	13.54	16.85
y の四捨五入値						

(解答)

x [V]	0.00	1.05	2.23	3.15	4.11	4.95
x の四捨五入値	0.0	1.0	2.2	3.2	4.1	5.0
y [A]	1.02	3.05	7.15	8.06	13.54	16.85
y の四捨五入値	1.0	3.0	7.2	8.1	13.5	16.8

問–13. 以下の数値の有効けたは、全て 3 桁になっている。有効数字が分かるように書き直せ。

(a) 325000

(b) 0.0000123

(c) 1210

(d) 0.0002

問–14. 以下の数値の差を求めよ。但し、誤差の範囲を示せ。

(a) 1.25 と 1.260
(b) 0.860 V と 8.5×10^2 mV
(c) 177.50 cm と 1.77 m

問–15. 最大出力 72 W の増幅器が, インピーダンス 8 Ω のスピーカに接続されている. 最大電流 I, 最大電圧 V を求めよ.

(解答) $I^2R = 72$ より, I=3 A. したがって, $V = 72/3 = 24$ V.

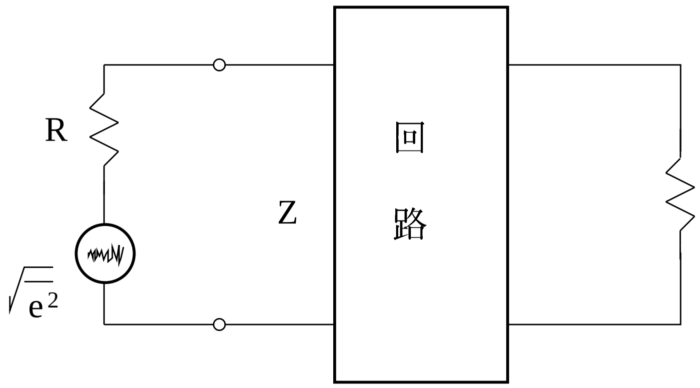
問–16. 信号電力 $Ps = 250$ mW, 雑音電力 $Pn = 10$ mW のとき、SN 比は、何 dB か。

(解答) $10\log_{10}\frac{250}{10} = 14$ dB

問–17. 出力 30W の増幅機がインピーダンス 20Ω のスピーカに接続されている。増幅機の電力利得、電圧利得がそれぞれ 35dB, 45dB のとき、増幅機の入力電圧と入力電力を求めよ。

問–18. 1 mW は、dBm に直すといくらになるか。

問–19. 下の図において、$\sqrt{e^2}$ が雑音電圧を表し、R がその内部抵抗を表しているとする。また、Z は負荷のインピーダンスである。以下の設問答えよ。



Z : 入力インピー　ダンンス

(a) Z で消費される電力 P_n を求めよ。

(b) 雑音電力が最大となるときの Z を求めよ。

(c) そのときの最大雑音電力を求めよ。

(解答)

(a) Z に流れる電流を I, Z にかかる電圧を V_n とおくと

$$I = \frac{\sqrt{\bar{e^2}}}{R+Z}, \qquad V_n = \frac{\sqrt{\bar{e^2}} \times Z}{R+Z}$$

したがって、消費電力 P_n は、

$$P_n = I \times V_n = \frac{\sqrt{\bar{e^2}}}{R+Z} \times \frac{\sqrt{\bar{e^2}} \times Z}{R+Z} = \frac{\bar{e^2} Z}{(R+Z)^2}$$

(b) 雑音電力は、上式のとおり、Z の関数になっている。したがって、Z で微分して極小値を求めれば良い。P_n を Z で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{dZ} &= \bar{e^2} \frac{R-Z}{(R+Z)^3} = 0 \\ Z &= R \end{aligned}$$

(c) 上記の条件を P_n の式に代入すれば良いので、

$$\begin{aligned} P_{max} &= \frac{\bar{e^2} R}{(R+R)^2} \\ &= \frac{\bar{e^2}}{4R} \end{aligned}$$

問–20. 有能入力雑音電力について説明せよ。

問–21. ある装置に、1 mW の信号を入力したところ 1 W まで増幅された。

(a) 電力増幅率をデシベル値で答えよ。

(b) このとき入力雑音電力を測定したところ 10 μW であったが、出力雑音電力は 20 mW であった。雑音指数はいくらか。

問–22. 指示電気計器の三要素を挙げそれぞれを説明せよ。

(解答)

指示電気計器の 3 要素には「駆動装置」、「制御装置」、「制動装置」が挙げられる.

「駆動装置」は指針を動かすための駆動トルクを発生させる装置.

「制御装置」は指針を元の位置に戻そうとする制御トルクを生ずる装置で, 指針は駆動トルクと制御トルクの釣り合った位置で静止する.

「制動 (Damping)」はブレーキのことで, 制動が働くことにより指針の動きと逆方向の力が働く.

問–23. $V = A\sin\omega t$ の実効値を求めよ (答えだけではなく、計算式を示すこと)。

問–24. 各家庭に引かれている電源コンセント (商用電源) の電圧は、100 V といわれている。最大値はいくらか。

(解答)

$100 \times \sqrt{2} = 141$ V

問–25. 実効値 1 V の交流波形をできるだけ正確に描きなさい。

問–26. 指示電気計器において重要なファクターには何があるか。3 つ挙げてそれぞれを説明せよ。

(解答) セクション 5.3 を見よ.

問–27. ある電流値を Class 2.5 の電流計を用い、10 mA レンジで測定した。指示値が 2 mA であった場合、真の電流はどの範囲にあるか。また、誤差率を求めよ。

(解答)

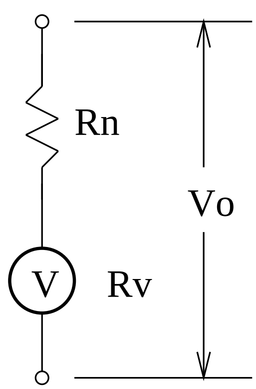
$$\text{誤差} = 10 \times \frac{2.5}{100} = 0.25 \quad \text{mA} \tag{132}$$

したがって、電流範囲は、2 ± 0.25 mA となる。また、誤差率は

$$\frac{0.25}{2} \times 100 = 12.5 \tag{133}$$

より、12.5 % となる。

問–28. 内部抵抗 R_v で、測定電圧 1 V の電圧計を用いて 10 V の電圧を測定するには、どのようにすれば良いか。



(解答) 図のように Rn を直列に挿入する。Rn は以下のように求める。

$$\begin{aligned} \frac{Rv}{Rv+Rn}\times 10 &= 1 \\ \text{従って、}Rn &= 9Rv \end{aligned} \tag{134}$$

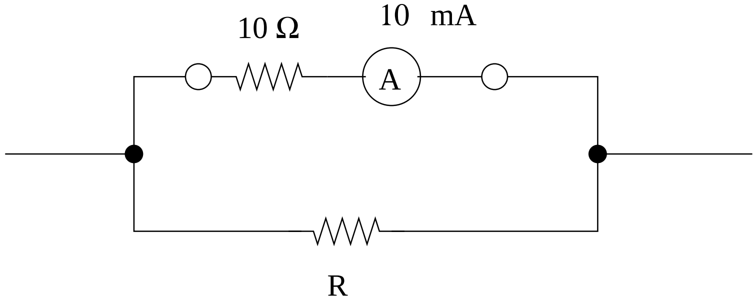
問–29. 最大目盛 10 mA, 内部抵抗 10 Ω の電流計を用い、最大目盛 1A を指示させようとするには、どのぐらいの大きさの分流器が必要か。(計算式も示すこと。)

(解答)

下図のように接続すると考えると、R に流れる電流が 990mA であるので、

$$\begin{aligned} R\times 0.99 &= 10\times 0.01 \\ R &= 0.10101 \end{aligned}$$

より、$R = 0.101\ \Omega$



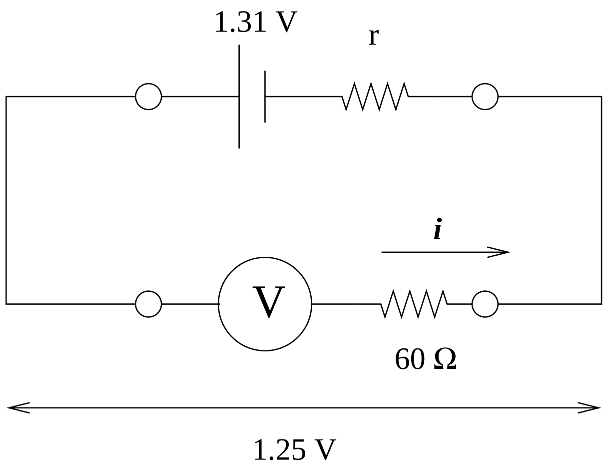
問–30. 電池の起電力を電位差計で測定したところ 1.31 V であった。また、電圧計で測定したところ 1.25 V であった。電池の内部抵抗を求めよ。ただし、電圧計の内部抵抗は、60 Ω とする。

(解答)

電位差計は、被測定電池に電流を流さないから、この電池の真の起電力は 1.31 V である。電圧計に流れる電流値は $i = 1.25/60$ であり、それがそのまま回路に流れる電流値に等しいので、

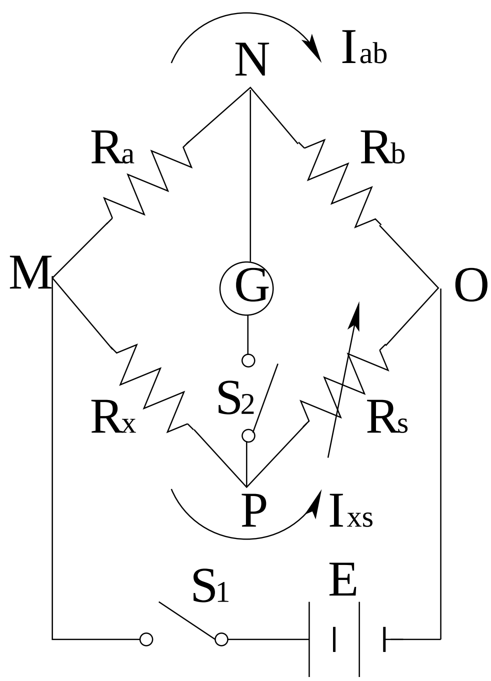
$$\begin{aligned} 1.31 &= r\cdot i + 60\cdot i \\ \text{したがって、}r &= \frac{1.31-60\cdot i}{i} \\ &= \frac{1.31}{i} - 60 \\ &= 1.31\times\frac{60}{1.25} - 60 \\ &= 2.88\quad\Omega \end{aligned}$$

となる。



問–31. 一般的なホイートストンブリッジを図に示し、平衡条件を求めよ。

問–32. 図のホイートストンブリッジにおいて、未知抵抗 R_X を求めよ。但し、$R_a = 10\ \Omega$, $R_b = 100\ \Omega$ $R_s = 260$ Ω とする。



(解答)

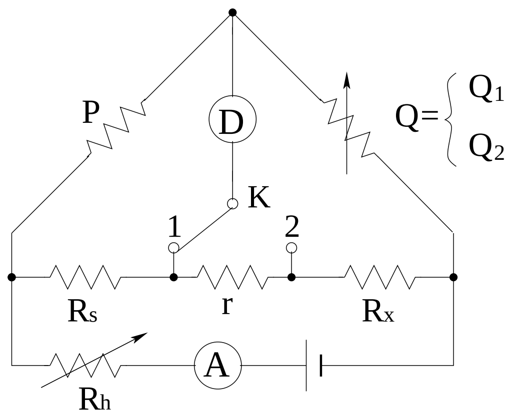
平衡条件

$$R_a \times R_s = R_b \times R_x \tag{135}$$

より

$$R_x = \frac{R_a \times R_s}{R_b} = \frac{10 \times 260}{100} = 26 \quad \Omega\text{となる。} \tag{136}$$

問–33. 図は、低抵抗を測定するためにホイートストンブリッジに工夫を施したものである。図の回路において未知抵抗 R_x を求めよ。ただし、Q の値は、スイッチを 1 に倒したとき $Q = Q_1$, イッチを 2 に倒したと



き $Q = Q_2$ である。

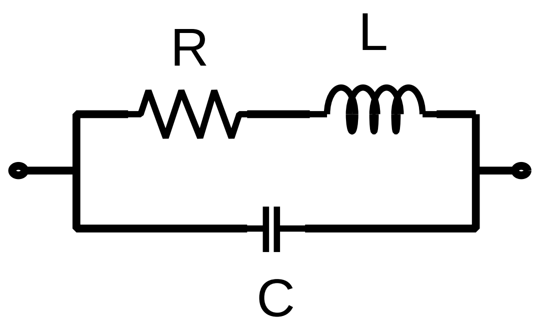
問–34. 図は、標準抵抗器の等価回路である。端子間のインピーダンスは、

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R+j\omega L} + j\omega C} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}$$

である。特に、周波数範囲が $\omega L \ll R, \omega CR \ll 1$ ならば、

$$Z \simeq R + j\omega(L - CR^2)$$

となる。したがって、R は等価抵抗であり、$\boxed{\text{(a)}}$ は等価インダクタンスである。



この等価インダクタンスを R で割った値 $\boxed{\text{(b)}}$ を抵抗器の時定数という。

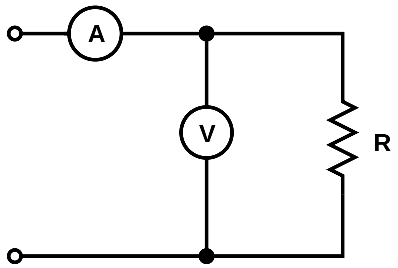
(a)

(b)

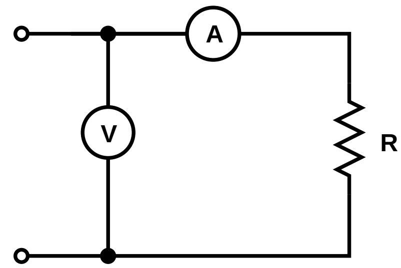
問–35. 図の 2 種類の回路において、電圧計の内部抵抗を R_v, 電流計の内部抵抗を R_a として、以下の問に答えよ。ただし、R は未知抵抗とする。

(a) I の回路において、電流計に流れる電流値を I_1 [A], 電圧計にかかる電圧を V_1 [V] として、抵抗 R に流れる電流を求めよ。

(b) I の回路において抵抗 R で消費される電力を求めよ。



I



II

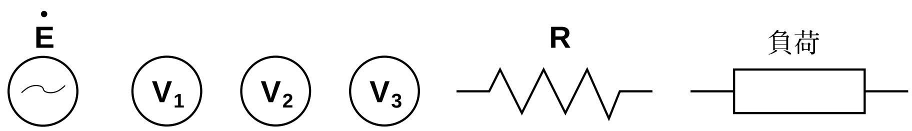
(c) II の回路において、電流計に流れる電流値を I_2 [A], 電圧計にかかる電圧を V_2 [V] として、抵抗 R にかかる電圧を求めよ。

(d) II の回路において抵抗 R で消費される電力を求めよ。

(e) 負荷抵抗 R の値が大きい時は、どちらの回路を採用すべきか。理由も答えよ。

問–36. 電圧計だけで単相電力を測定する方法に三電圧計法がある。以下の問に答えよ。

(a) 以下の部品を用い、回路図を示せ。



(b) 負荷での消費電力が、以下の式で与えられることを示せ。

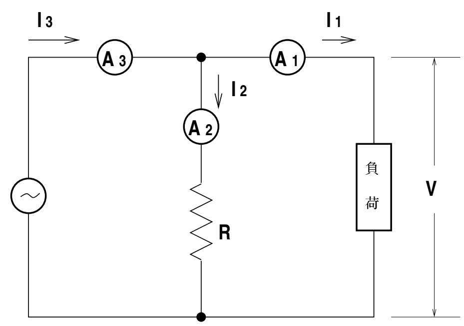
$$P = \frac{1}{2R}(V_3^2 - V_1^2 - V_2^2)$$

(c) 力率が以下の式で与えられることを示せ。

$$\cos\phi = \frac{V_3^2 - V_1^2 - V_2^2}{2V_1V_2}$$

問–37. 3 電圧計法により単相交流電圧を測定したところ、V_1 の指示が 150[V], V_2 の指示が 100[V], V_3 の指示が 80[V] であった。この時の抵抗値が 50Ω のときの電力を求めよ。

問–38. 図に示すように、3 個の電流計の読み I_1, I_2, I_3 と既知の抵抗 R から負荷で消費される電力に関して、以下の問に答えよ。

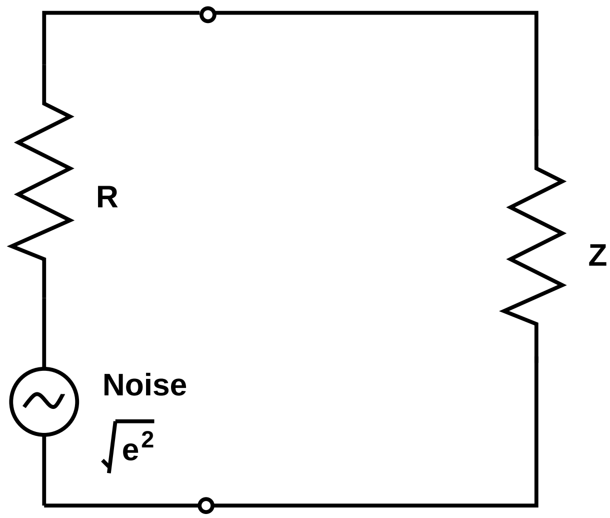


(a) 負荷電流 $\dot{I}_1$ は負荷電圧 $\dot{V}$ より位相 ϕ だけ遅れているとするとした場合、$\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$, $\dot{V}$ のベクトル図を示せ。

(b) I_1, I_2, I_3 の関係式を導出せよ。

(c) 交流電力 P および力率 $\cos\phi$ を求めよ。

問–39. 雑音源の Noise 電圧 (雑音源電圧) が $\sqrt{\overline{e}^2}$ であり、内部抵抗が R である時以下の問に答えよ。



(a) Z (Ω) で消費される雑音電力 P を求めよ。

(b) Z の大きさがいくつの時最大雑音電力となるか。

(c) 最大雑音電力はいくつか。但し、$\overline{e}^2 = 4ktRB$ とする。

問–40. ホール係数 20 [mV/mA · T · mm], 厚さ 0.25 [mm] のホール素子を 0.4 [T] の磁束密度中において、0.5[mA] の電流を流した場合に得られるき電力を求めよ。(解答)

$$V_H = \frac{20 \times 0.5 \times 0.4}{0.25} = 16 \qquad \text{mV}$$

問–41. 0.5 Wb の 磁束が巻数 10 回の探りコイル中を短時間に −0.5 Wb まで変化したとすると、磁束計を通過する電荷はいくらか。但し、磁束計の全抵抗は 10 Ω とする。

(解答)

通過電荷は、

$$\begin{aligned} Q &= It \\ &= \frac{n\Delta\phi}{Rt}t = \frac{n\Delta\phi}{R} \end{aligned} \tag{137}$$

$n = 10,\ \Delta\phi = 0.5 - (-0.5) = 1,\ R = 10$ を代入して、

$$Q = 1 \qquad [\mathrm{C}]$$

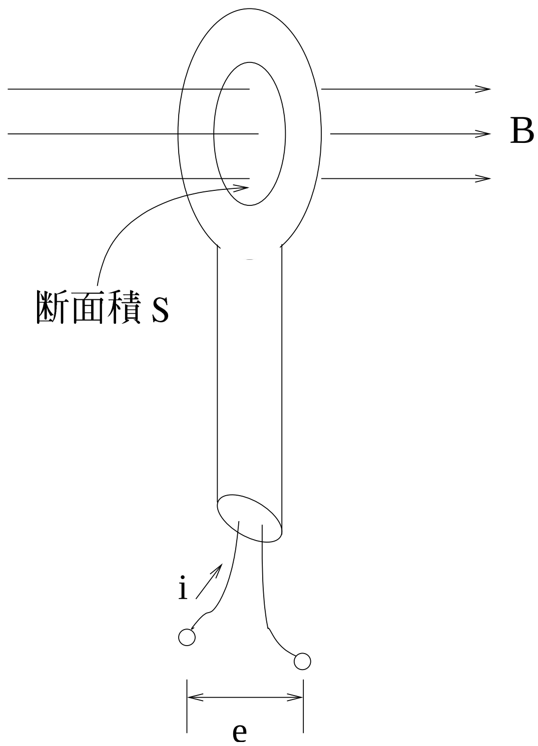
となる。

問–42. ある場所の磁界を測定する場合、探りコイルを用いる。探りコイルの断面積を S, 探りコイルの巻き数を N, 探りコイルの抵抗値を R としたとき、磁束密度 B は、

$$B = \frac{QR}{SN}$$

となることを説明せよ。但し、Q はコイルを通過した全電荷量を示す。

(解答)



探りコイルに磁束 Φ が鎖交したときの起電力 e は、

$$e = N\frac{d\Phi}{dt}$$

となる。したがって、コイルに流れる電流は、

$$i = \frac{e}{R} = \frac{N}{R}\frac{d\Phi}{dt}$$

となり、通過した全電荷は、

$$\begin{aligned} Q = \int idt &= \frac{N}{R}\int\frac{d\Phi}{dt}dt \\ &= \frac{N}{R}\Phi \end{aligned}$$

となる。

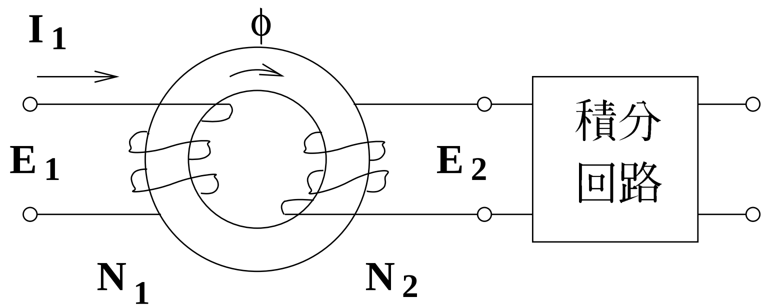
$$\Phi = \frac{QR}{N}$$

より、

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{QR}{SN}$$

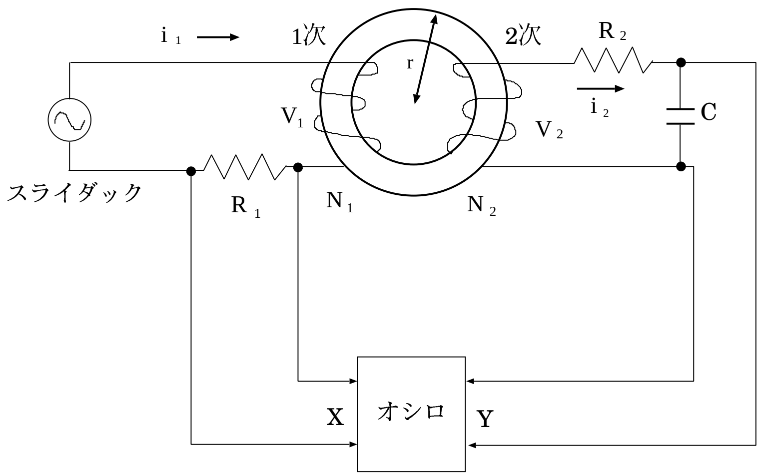
となる。

問–43. 積分回路を用いることによって、磁束が測定できる理由を説明せよ。

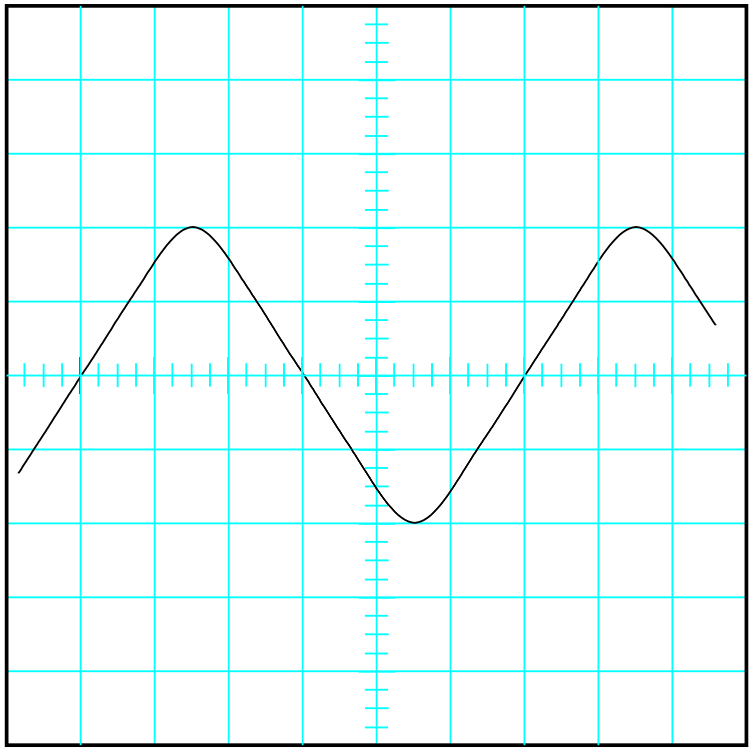


(解答)

問–44. オシロスコープを用いた $B-H$ 曲線の測定装置図を以下に示す。この回路で $B-H$ 曲線が得られる理由を説明せよ。(解答)



問–45. オシロスコープに以下の波形が表示されている時、周期と周波数と振幅 (V_{P-P}) を求めよ。ただし、レンジは 2V/div, 5mS/div であるとする。

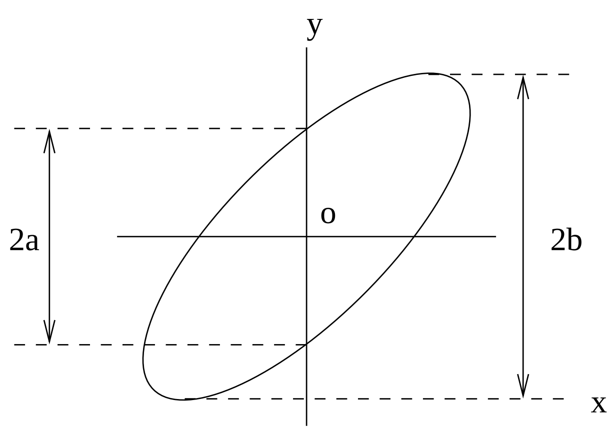


(解答)

問–46. パルス波形の パルス幅、立ち上がり時間、立ち下がり時間について述べよ。

問–47. オシロスコープの水平軸と垂直軸に以下のような位相の異なる正弦波電圧を加える。$\theta = 0, \pi/6, \pi/3, \pi$ のときのリサージュ図形を求めよ。

問–48. オシロスコープの水平軸と垂直軸のそれぞれに、以下のように同じ周波数の異なる正弦波を加えたとき、その位相差 θ が $\sin\theta = b/a$ で求まることを示せ。



(解答)

水平軸と垂直軸に印加する電圧を以下のように定める。

$$e_x = E\sin\omega t \quad (138)$$
$$e_y = E\sin(\omega t + \theta) \quad (139)$$

式 (139) をばらして ωt を消去すると、

$$
\begin{aligned}
e_y &= E\sin(\omega t+\theta) = E\sin\omega t\cos\theta + E\cos\omega t\sin\theta && (140)\\
E\cos\omega t\sin\theta &= e_y - E\sin\omega t\cos\theta && (141)
\end{aligned}
$$

式 (138) を代入して、

$$
\begin{aligned}
E\cos\omega t\sin\theta &= e_y - e_x\cos\theta && (142)\\
\cos\omega t &= \frac{e_y}{E\sin\theta} - \frac{e_x\cos\theta}{E\sin\theta} && (143)\\
\cos^2\omega t &= \frac{e_y^2}{E^2\sin^2\theta} - 2\frac{e_x e_y\cos\theta}{E^2\sin^2\theta} + \frac{e_x^2\cos^2\theta}{E^2\sin^2\theta} && (144)
\end{aligned}
$$

式 (138) より、$\sin^2\omega t = \frac{e_x^2}{E^2}$ をくわえると、

$$
\begin{aligned}
\cos^2\omega t + \sin^2\omega t &= \frac{e_y^2}{E^2\sin^2\theta} - 2\frac{e_x e_y\cos\theta}{E^2\sin^2\theta} + \frac{e_x^2\cos^2\theta}{E^2\sin^2\theta} + \frac{e_x^2}{E^2} && (145)\\
1 &= \frac{e_y^2}{E^2\sin^2\theta} - 2\frac{e_x e_y\cos\theta}{E^2\sin^2\theta} + \frac{e_x^2\cos^2\theta}{E^2\sin^2\theta} + \frac{e_x^2}{E^2} && (146)\\
E^2\sin^2\theta &= e_y^2 - 2e_x e_y\cos\theta + e_x^2\cos^2\theta + e_x^2\sin^2\theta && (147)\\
&= e_y^2 - 2e_x e_y\cos\theta + e_x^2 && (148)
\end{aligned}
$$

E は最大値であるので、$E=a$, また、$e_x=0$ のとき $e_y=b$ とおけば、

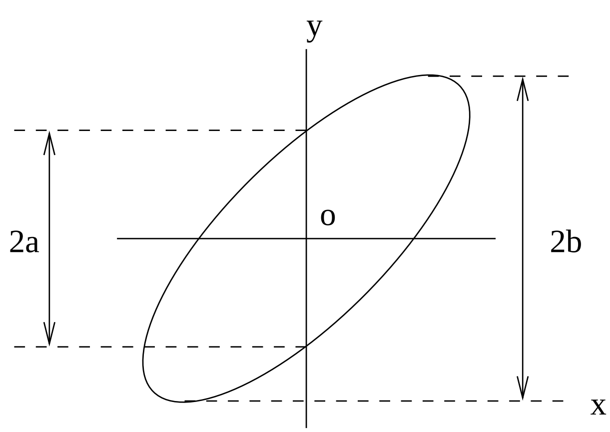
$$E^2\sin^2\theta = b^2$$

であるので、

$$\sin\theta = \frac{b}{a}$$

となる。

問–49. オシロスコープの水平軸と垂直軸のそれぞれに、同じ周波数の異なる正弦波を加えたとき、以下のようなリサージュが得られた。$a=2, b=4$ のとき、位相差はいくらか。



(解答)