はじめに

試験の結果、多かった誤り、その他、注意点

問題 1 (1.3) ~ (1.5): ４次以上の行列式の計算ではサーラスの規則 (教科書 p.36, 式 (3.3) のすぐ下に説明してある計算方法) が使用できないにもかかわらず、この方法を用いて行列式の値を求めようとしている。

- 行列式の変形を行なう際、どの行 (列) にどのような操作を使用としているのか説明がない。
- 余因数による展開方法をが間違えている。
- 余因数を求める際に、小行列式の値に符合を考慮することを忘れている。

問題 5 (5.1), (5.2): 行列式 (determinant) と行列 (matrix) の区別が不明瞭。

[1] 次の行列式を計算せよ。

(1.1)

$$\begin{vmatrix} 1+j & 1-j \\ 3 & 2+j \end{vmatrix} = (1+j)(2+j) - 3(1-j) = -2+6j$$

(1.2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

第３行から第１行を引き算
第２行から $2\times$(第１行) を引き算

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

第１行で展開

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

(1.3)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

第１行に (第２行 + 第３行 + 第４行) を加える

$$= \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

第１行を 4 でまとめる

$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

第１列に (第２列 + 第３列 + 第４列) を加えて、第１列を 4 でまとめる

$$= 16 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

第２行に第４行を加える

$$= 16 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

第２行を 2 でまとめる

$$= 32 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

第２行を 2 でまとめる

$$= 0$$

あるいは

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

第１行に第３行を加算
第２行に第４行を加算

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(1.4)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

第１列から第４列を引き算

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

第１列で展開

$$= -3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

第１行で展開

$$= -6 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 \times 3 \times 3 = -54$$

あるいは

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

第１行で展開

$$= 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 16 - 3 \times (27+8) = -54$$

(1.5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

第３行から第１行を引き算
第４行から第１行を引き算

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

第１列で展開

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

第２列から第１列を引き算
第４列から第１列を引き算
その後、 第１行で展開

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

第１行に第４行を加えた後に
第２列で展開

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

第１行に第３行を加え、
第１行を 2 でまとめる

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

---

[2] 次の行列式を計算し、因数分解せよ。

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

$$t = x/a$$

と置くと、

$$= a^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$$

第２行から第１行を引き算
第３行から第１行を引き算
第４行から第１行を引き算

$$= a^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix}$$

第１列で展開

$$= a^4 \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= a^4(t-1)^3$$

$$= a(x-a)^3$$

---

[3] 次の連立方程式をクラーメルの規則を使用して解け。

$$\begin{aligned} 2x + 5y - z &= 7 \\ 2x + 6y - 7z &= 3 \\ x + 3y - z &= 4 \end{aligned}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$x = \begin{vmatrix} 7 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & -7 \\ 7 & 3 & -1 \end{vmatrix} / A = -5/5 = -1$$

$$y = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} / A = 10/5 = 2$$

$$z = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} / A = 5/5 = 1$$

---

[4] 任意の行列 A に対し、 A^tA は対称行列となることを示せ。ただし、 A^t は A の転置行列を意味する。
[解答例]

$$B = A^tA$$

と置くと、

$$B^t = (A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA = B$$

よって、 $B^t = B$ となり、 B は対称マトリクスである。
(別解)
A を N 行 M 列のマトリクスとし、

$$A = [a_{ij}], \quad C = A^tA = [c_{ij}]$$

とあらわすと、 C は M 行 N 列のマトリクスとなり、その要素は、

$$c_{ij} = a_{ji}$$

と表される。
したがって、

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \sum_{k=1}^{N} c_{ik}a_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{N} a_{ki}a_{kj} \end{aligned}$$

と表され、添字 i, j を交換しても b_{ij} の値は変わらない。

---

[5] 次の行列 (マトリクス) を含む式を計算せよ。

(5.1)

$$\begin{bmatrix} 3+j4 & 1+j2 \\ 4+j2 & 2-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6+j4 \\ 1+j2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3+j4)(6+j4)+(1+j2)^2 \\ (4+j2)(6+j4)+(2-j)(1+j2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+40j \\ 20+41j \end{bmatrix}$$

(5.2)

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

(5.3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$$

と置く。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$$

第２行から第１行を引き算
第３行から第２行を引き算

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & a-1 & a^2-1 \end{vmatrix}$$

第１列で展開

$$= \begin{vmatrix} a^2-1 & a-1 \\ a-1 & a^2-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)^2 \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)^2\{(a+1)^2-1\}$$

$$= (a-1)^2 a(a+2)$$

ここで、a_{ij} の余因数 A_{ij} を求めると、

$$A_{11} = a^4-a^2 = (a^2-1)a^2 = (a+1)(a-1)a^2$$
$$A_{12} = A_{21} = -(a^2-a) = -a(a-1)$$
$$A_{13} = A_{31} = a-a^2 = -a(a-1)$$
$$A_{22} = a^2-1 = (a+1)(a-1)$$
$$A_{23} = A_{32} = -(a-1)$$
$$A_{33} = a^2-1 = (a+1)(a-1)$$

以上より、

$$A^{-1} = \frac{1}{a(a-1)^2(a+2)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A32 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{a(a-1)(a+2)} \begin{bmatrix} (a+1)a^2 & -a & -a \\ -a & a+1 & -1 \\ -a & -1 & a+1 \end{bmatrix}$$