1 微分

1.1 $y = (x^2 + x + 1)^7$

解答

$$
\begin{aligned}
y' &= 7(x^2 + x + 1)^6 \times (x^2 + x + 1)' \\
&= 7(2x + 1)(x^2 + x + 1)^6
\end{aligned}
$$

解説

$$t = x^2 + x + 1$$

と置いて、合成関数の微分公式を適用する。

$$y = t^7$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \\
&= \left\{\frac{d}{dt}t^7\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)\right\} \\
&= 7t^6 \times (2x + 1) \\
&= 7(2x + 1)(x^2 + x + 1)^6
\end{aligned}
$$

1.2 $y = \sqrt{x}\log x$

解答

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\sqrt{x}\right)' \log x + \sqrt{x}\,(\log x)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}} \log x + \sqrt{x} \times \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}(2 + \log x)
\end{aligned}
$$

補足説明
積の微分公式

$$(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g$$

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{x})' &= \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' \\
&= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \\
&= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

1.3 $y = \dfrac{x^3 + 1}{x - 1}$

解答

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{(x^3 + 1)'(x - 1) - (x^3 + 1)(x - 1)'}{(x - 1)^2} \\
&= \frac{3x^2(x - 1) - (x^3 + 1)}{(x - 1)^2} \\
&= \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(x - 1)^2}
\end{aligned}
$$

解説
商の微分公式

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$f = x^3 + 1, \qquad g = x - 1$$

1.4 $y = \log\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

解答

$$
\begin{aligned}
y &= \log(x^2 + 1) - \log(x^2 - 1) \\
y' &= \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} - \frac{(x^2 - 1)'}{x^2 - 1} \\
&= \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{2x}{x^2 - 1} \\
&= \frac{2x\{(x^2 - 1) - (x^2 + 1)\}}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} \\
&= -\frac{4x}{x^4 - 1}
\end{aligned}
$$

解説
対数関数の微分

$$(\log f)' = \frac{f'}{f}$$

1.5 $y = 10^x$

解答

$$
\begin{aligned}
y &= e^{x\log 10} \\
y' &= \left(e^{x\log 10}\right)' \\
&= \log 10 \times e^{x\log 10} \\
&= 10^x \log 10
\end{aligned}
$$

別解
両辺の対数を取ると、

$$\log y = x\log 10$$

上式を x について微分して、

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \log 10 \\ \frac{dy}{dx} &= y\log 10 \\ &= 10^x \log 10\end{aligned}$$

解説
両辺の (自然) 対数を計算すると、

$$\log y = \log 10^x = x\log 10$$

したがって、

$$y = e^{\log y} = e^{x\log 10}$$

上の変形には次の関係式を利用している。
　対数関数と指数関数の関係

$$a = \log b \quad \Leftrightarrow \quad b = e^a$$

より、

$$b = e^a = e^{\log b}$$

が成り立つ。

　対数関数の性質

$$\begin{aligned}\log a^p &= p\log a \\ e^{\log a} &= a \\ \log e &= 1\end{aligned}$$

1.6 $y = \tan^{-1} x$

解答

$$x = \tan y = \frac{\sin y}{\cos y}$$

と表されるので、両辺を y で微分して、

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \frac{(\sin y)'\cos y - \sin y(\cos y)'}{\cos^2 y} \\ &= \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} \\ &= 1 + \tan^2 y \\ &= 1 + x^2\end{aligned}$$

したがって、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2}$$

解説
逆関数の微分

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

2 積分

2.1 $I = \int \sqrt[3]{x^4}dx$

解答

$$\begin{aligned}I &= \int x^{\frac{4}{3}}dx \\ &= \frac{1}{\frac{4}{3}+1}x^{\frac{4}{3}+1} + C \\ &= \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + C\end{aligned}$$

2.2 $I = \int x\cos(x^2+1)dx$

解答

$$u = x^2 + 1$$

と置くと、

$$du = 2xdx, \quad xdx = \frac{1}{2}du$$

であるから、

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\int \cos u du \\ &= \frac{1}{2}\sin u + C \\ &= \frac{1}{2}\sin(x^2+1) + C\end{aligned}$$

2.3 $I = \int e^{x+\log x}dx$

解答

$$e^{x+\log x} = e^x e^{\log x} = e^x \times x$$

と変形できるので、

$$I = \int xe^x dx$$

部分積分により、

$$\begin{aligned}I &= \int x(e^x)'dx \\ &= xe^x - \int x'e^x dx \\ &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= (x-1)e^x + C\end{aligned}$$

解説
対数関数の性質

$$e^{p\log x} = e^{\log x^p} = x^p$$

2.4 $I = \int \log x dx$

解答

部分積分により、

$$\begin{aligned} I &= \int x' \log x dx \\ &= x\log x - \int x(\log x)' dx \\ &= x\log x - \int x \times \frac{1}{x} dx \\ &= x\log x - \int dx \\ &= x\log x - x + C \\ &= -x(1-\log x) + C \end{aligned}$$

別解

$$u = \log x$$

と置くと、

$$x = e^u, \qquad dx = e^u du$$

したがって、

$$I = \int u e^u du$$

部分積分して、

$$\begin{aligned} I &= \int u(e^u)' du \\ &= ue^u - \int u' e^u du \\ &= ue^u - \int e^u du \\ &= ue^u - e^u + C \\ &= (u-1)e^u + C \\ &= (\log x - 1)e^{\log x} + C \\ &= -(1-\log x) \times x + C \end{aligned}$$

2.5 $I = \int \cos 2x \sin x dx$

解答

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \{\sin(2x+x) - \sin(2x-x)\} dx \\ &= \frac{1}{2}\int \{\sin 3x - \sin x\} dx \\ &= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x\right\} + C \\ &= -\frac{1}{6}\{\cos 3x - 3\cos x\} + C \end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{\cos 2x}_{f_1} \times \underbrace{\sin x}_{g_1{}'} dx \\ &= \underbrace{\cos 2x}_{f_1} \times \underbrace{(-\cos x)}_{g_1} - \int \underbrace{(-2\sin 2x)}_{f_1{}'} \times \underbrace{(-\cos x)}_{g_1} dx \\ &= -\cos 2x \cos x - 2\int \sin 2x \cos x dx \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} &\int \sin 2x \cos x dx \\ &\quad = \int \underbrace{\sin 2x}_{f_2} \times \underbrace{(\sin x)'}_{g_2{}'} dx \\ &\quad = \underbrace{\sin 2x}_{f_2} \times \underbrace{\sin x}_{g_2} - \int \underbrace{2\cos 2x}_{f_2{}'} \times \underbrace{\sin x}_{g_2} dx \\ &\quad = \sin 2x \sin x - 2\int \cos 2x \sin x dx \\ &\quad = \sin 2x \sin x - 2I \end{aligned}$$

と変形できるので、

$$\begin{aligned} I &= -\cos 2x\cos x - 2\sin 2x \sin x + 4I \\ -3I &= -\cos 2x \cos x - 2\sin 2x \sin x \\ I &= \frac{1}{3}\{\cos 2x \cos x + 2\sin 2x \sin x\} + C \end{aligned}$$

2.6 $I = \int \frac{x-1}{x^2-2x-3} dx$

解答

$$\frac{x-1}{x^2-2x-3} = \frac{x-1}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

と部分分数に展開すると、係数 A, B は

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{x-1}{x+1}\right|_{x=3} = \frac{1}{2} \\ B &= \left.\frac{x-1}{x-3}\right|_{x=-1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-3} dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}\log(x-3) + \frac{1}{2}\log(x+1) + C \end{aligned}$$

別解

$$u = x^2 - 2x - 3$$

と置くと、

$$du = (2x-2)dx, \qquad (x-1)dx = \frac{1}{2}du$$

であるから、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2-2x-3)+C \end{aligned}$$

3 微分方程式

3.1 $\dfrac{dy}{dy} = y\cos x$

解答

$$\frac{1}{y}dy = \cos x dx$$

と変形し (変数分離型)、両辺を積分すると、

$$\begin{aligned} \log y &= \sin x + C \\ y &= e^{\sin x + C} \\ &= Ae^{\sin x} \end{aligned}$$

解説

変数分離型の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = P(x)\cdot Q(y)$$

両辺を $Q(y)$ で割り算し、x について積分する。

$$\int\frac{1}{Q(y)}\frac{dy}{dx}dx = \int P(x)dx$$

$$\int\frac{1}{Q(y)}dy = \int P(x)dx$$

3.2 $x\dfrac{dy}{dx} = y + x^3e^x$

解答

非同次一階線形微分方程式

1. 余関数を求める。

$$x\frac{dy_c}{dx} = y_c$$

を解く。

$$\frac{dy_c}{y_c} = \frac{dx}{x}$$

両辺を積分して、

$$\begin{aligned} \log y_c &= \log x + C \\ y_c &= Ax \end{aligned}$$

2. もとの方程式の解を

$$y = x\times u(x)$$

と表してみる。(定数変化法)

$$x\frac{d}{dx}\{xu(x)\} = xu(x) + x^3e^x$$

を整理して、

$$x^2\frac{du(x)}{dx} = x^3e^x$$

$$\begin{aligned} \frac{du(x)}{dx} &= xe^x \\ u(x) &= \int xe^x dx \\ &= \int x(e^x)'dx \\ &= xe^x - \int x'e^x dx \\ &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= (x-1)e^x + C \\ y &= xu(x) \ = \ x(x-1)e^x + Cx \end{aligned}$$

別解

非同次一階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

の解

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right\}$$

において、

$$P(x) = -\frac{1}{x}, \qquad Q(x) = x^2e^x$$

と置く。

$$\begin{aligned} &\int P(x)dx \\ &\quad = -\int\frac{dx}{x} \\ &\quad = -\log x \\ e^{-\int P(x)dx} &\quad = e^{\log x} \\ &\quad = x \\ &\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \\ &\quad = \int x^2e^x \times x^{-1}dx \\ &\quad = \int xe^x dx \\ &\quad = xe^x - \int e^x dx \\ &\quad = (x-1)e^x \end{aligned}$$

であるから、

$$y = x\{(x-1)e^x + C\}$$

解説
非同次一階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

の一般解[1]:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right\}$$

解の導出方法については、授業での配布資料 を参照のこと

3.3 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = 5, \quad (y(0) = y'(0) = 0)$

解答
非同次定係数二階線形微分方程式

1. 余関数:

   $${y_c}'' + 4{y_c}' + 5y_c = 0$$

   を解く。特性方程式を解くと、

   $$m^2 + 4m + 5 = 0$$

   $$(m+2)^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -2 \pm j$$

   が得られるので、

   $$\begin{aligned} y_c &= Ae^{(-2+j)x} + Be^{(-2-j)x} \\ &= (C\cos x + D\sin x)e^{-2x} \end{aligned}$$

   ここで、C、D は積分定数である。

2. 特解

   $$y_p = K \ (= \text{定数})$$

   と仮定し、もとの微分方程式に代入して定数 K を定める。

   $${y_p}' = {y_p}'' = 0$$

   であるから、

   $$y_p = 1, \qquad (K = 1)$$

   は与えられた微分方程式の解である。(特解)

3. 一般解

   $$y = y_p + y_c = 1 + (C\cos x + D\sin x)e^{-2x}$$

4. 初期条件

   $$y(0) = y'(0) = 0$$

   を満足するよう、上で得られた一般解の定数 C、D を決定する。

   $$\begin{aligned} y' &= (-C\sin x + D\cos x)e^{-2x} \\ &\quad -2(C\cos x + D\sin x)e^{-2x} \\ y(0) &= 1 + C \ = \ 0 \\ y'(0) &= D - 2C \ = \ 0 \end{aligned}$$

   以上より、

   $$C = -1, \qquad D = -2$$

   したがって、求める解は、

   $$y = 1 - (\cos x + 2\sin x)e^{-2x}$$

[1] http://www.ee.t-kougei.ac.jp/tuushin/lecture/math2/diffeq/text/node8.html