期末試験 (2004/1/14) の解答

1 微分

1.1 $y = \dfrac{1}{(2x+5)^{10}}$

解答

$$\begin{aligned} y &= (2x+5)^{-10} \\ y' &= -10(2x+5)^{-11} \times (2x+5)' \\ &= -20(2x+5)^{-11} \\ &= -\frac{20}{(2x+5)^{11}} \end{aligned}$$

解説

$$t = 2x + 5$$

と置いて、合成関数の微分公式を適用する。

$$y = t^{-10}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \\ &= \left\{ \frac{d}{dt} t^{-10} \right\} \times \left\{ \frac{d}{dx}(2x+5) \right\} \\ &= -10t^{-11} \times 2 \\ &= -20t^{-11} \\ &= -20(2x+1)^{-11} \end{aligned}$$

1.2 $y = \log(\sqrt{x} + 1)$

解答

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sqrt{x}+1)'}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \end{aligned}$$

補足説明

$$\begin{aligned} (\sqrt{x})' &= \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' \\ &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

1.3 $y = (\sin x - \cos x)^2$

解答

$$\begin{aligned} y' &= 2(\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x)' \\ &= 2(\sin x - \cos x)(\cos x + \sin x) \\ &= 2(\sin^2 x - \cos^2 x) \end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned} y &= \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x) - 2\sin x \cos x \\ &= 1 - 2\sin 2x \\ y' &= -2cos2x \times (2x)' \\ &= -4\cos 2x \end{aligned}$$

1.4 $y = e^{-x}\cos 2x$

解答

$$\begin{aligned} y' &= (e^{-x})' \cos 2x + e^{-x}(\cos 2x)' \\ &= -e^{-x}\cos 2x - 2e^{-x}\sin 2x \\ &= -e^{-x}(\cos 2x + 2\sin 2x) \end{aligned}$$

解説

積の微分公式

$$(f \times g)' = f'g + fg'$$

1.5 $y = \sqrt[3]{3x-1}$

解答

$$\begin{aligned} y &= (3x-1)^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3}(3x-1)^{-\frac{2}{3}} \times 3 \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}} \end{aligned}$$

解説

$$t = 3x - 1$$

と置いて、

$$\begin{aligned} y &= t^{\frac{1}{3}}, \qquad t = 3x - 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{\frac{d}{dt}t^{\frac{1}{3}}\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}(3x-1)\right\} \\
&= \frac{1}{3}t^{\frac{1}{3}-1} \times 3 \\
&= t^{-\frac{2}{3}} \\
&= \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}}
\end{aligned}
$$

1.6 $y = \sin^{-1}\dfrac{x}{2}$

解答

$$\frac{x}{2} = \sin y$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
x &= 2\sin y \\
\frac{dx}{dy} &= 2(\sin y)' \\
&= 2\cos y \\
&= \pm 2\sqrt{1-\sin^2 y} \\
&= \pm 2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\
&= \pm\sqrt{4-x^2} \\
\frac{dy}{dx} &= \pm\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}
\end{aligned}
$$

解説

逆関数の微分

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

2 積分

2.1 $I = \displaystyle\int xe^{-x^2}dx$

解答

$$u = -x^2$$

と置くと、

$$du = -2xdx, \qquad xdx = -\frac{1}{2}du$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{2}\int e^u du \\
&= -\frac{1}{2}e^u + C \\
&= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C
\end{aligned}
$$

ただし、C は積分定数 (任意の定数) を表す。

解説

置換積分

$$u = -x^2, \quad du = -2xdx, \quad xdu = -\frac{1}{2}du$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
I &= \int \underbrace{e^{-x^2}}_{e^u}\ \underbrace{xdx}_{(-\frac{1}{2})du} \\
&= -\frac{1}{2}\int e^u du \\
&= -\frac{1}{2}e^u + C \\
&= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C
\end{aligned}
$$

置換積分

$$I = \int f(g(x)) \cdot g'(x)dx$$

$u = g(x)$ と置くと、$du = g'(x)dx$ であるから、

$$I = \int f(u)du$$

と変換できる。

ここでは、

$$f(u) = e^u, \quad g(x) = -x^2, \quad g'(x) = -2xdx$$

2.2 $I = \displaystyle\int xe^{-2x}dx$

解答

部分積分により

$$
\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C \\
&= -\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x} + C
\end{aligned}
$$

解説

部分積分により

$$
\begin{aligned}
I &= \int \underbrace{x}_{f} \times \underbrace{\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'}_{g'} dx \\
&= \underbrace{x}_{f} \times \underbrace{(-\frac{1}{2}e^{-2x})}_{g} - \int \underbrace{x'}_{f'} \times \underbrace{(-\frac{1}{2}e^{-2x})}_{g} dx \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C \\
&= -\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x} + C
\end{aligned}
$$

$u=-2x$ と変数変換した場合も部分積分が必要となる：

$$u=-2x,\qquad x=-\frac{1}{2}u,\qquad dx=-\frac{1}{2}du$$

であるから、

$$\begin{aligned}
I &= \int xe^{-2x}dx \\
&= \int(-\frac{1}{2}u)e^u(-\frac{1}{2}du) \\
&= \frac{1}{4}\int ue^u du \\
&= \frac{1}{4}\left\{ue^u-\int e^u du\right\} \\
&= \frac{1}{4}(ue^u-e^u)+C \\
&= \frac{1}{4}(u-1)e^u+C \\
&= \frac{1}{4}(-2x-1)e^{-2x}+C
\end{aligned}$$

部分積分

$$\begin{aligned}
I &= \int \underbrace{x}_{g}F'(x)dx \\
&= \underbrace{x}_{g}F(x)-\int \underbrace{x'}_{g'}F(x)dx \\
&= xF(x)-\int F(x)dx
\end{aligned}$$

2.3 $I=\int\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^2dx$

解答

$$\begin{aligned}
I &= \int(x-x^{-2})^2dx \\
&= \int(x^2-2x\times x^{-2}+x^{-4})dx \\
&= \int(x^2-2x^{-1}+x^{-4})dx \\
&= \frac{1}{3}x^3-2\log x-\frac{1}{3}x^{-3}+C \\
&= \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3x^3}-2\log x+C
\end{aligned}$$

2.4 $I=\int x\sqrt{x-1}dx$

解答

$$u=\sqrt{x-1}$$

と置くと、

$$u^2=x-1,\qquad x=u^2+1,\qquad dx=2udu$$

であるから、

$$\begin{aligned}
I &= \int(u^2+1)u\times 2udu \\
&= 2\int(u^4+u^2)du \\
&= 2\left(\frac{1}{5}u^5+\frac{1}{3}u^3\right)+C \\
&= \frac{2}{15}(3u^2+5)u^3+C \\
&= \frac{2}{15}\{3(x-1)+5\}(\sqrt{x-1})^3+C \\
&= \frac{2}{15}(3x+2)(\sqrt{x-1})^3+C
\end{aligned}$$

別解

部分積分:

$$\int\sqrt{x-1}dx=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}+C}$$

であるから、部分積分により、

$$\begin{aligned}
I &= \int \underbrace{x}_{f}\times\underbrace{\frac{2}{3}\left\{(x-1)^{\frac{3}{2}}\right\}'}_{g'}dx \\
&= \frac{2}{3}\left\{x(x-1)^{\frac{3}{2}}-\int(x-1)^{\frac{3}{2}}dx\right\} \\
&= \frac{2}{3}x(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(x-1)^{\frac{5}{2}}+C
\end{aligned}$$

2.5 $I=\frac{x}{x^2+3x+2}$

解答

$$\frac{x}{x^2+3x+2}=\frac{x}{(x+2)(x+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}$$

と部分分数に展開する。

展開係数を求めると、

$$\begin{aligned}
A &= \left.\frac{x}{x+1}\right|_{x=-2} = 2 \\
B &= \left.\frac{x}{x+2}\right|_{x=-1} = -1
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
I &= \int\left\{\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right\}dx \\
&= 2\log(x+2)-\log(x+1)+C \\
&= \log\{\frac{(x+2)^2}{x+1}\}+C
\end{aligned}$$

部分分数展開

$$x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$$

であるから、

$$\frac{x}{x^2+3x+2} = \frac{x}{(x+2)(x+1)}$$

を

$$\frac{x}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1}$$

と展開する。

このときの展開係数は次のようにして求めることができる。

上式の両辺に $x+2$ をかけ算すると、

$$\frac{x}{x+1} = A + \frac{x+2}{x+1}B$$

を得る。ここで、$x=-2$ と置くと B の係数が 0 となるので、容易に A の値を求めることができる：

$$A = \frac{-2}{-2+1} = 2$$

同様に、展開式の両辺に $x+1$ をかけ算し、$x=-1$ と置くと B の値が求まる：

$$B = \left.\frac{x}{x+2}\right|_{x=-1} = \frac{-1}{-1+2} = -1$$

以上より、

$$\frac{x}{x^2+3x+2} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

と展開できる。

2.6 $I = \int e^x \cos x dx$

解答

部分積分を繰り返して

$$\begin{aligned}
I &= \int \underbrace{e^x}_{{f_1}'}\underbrace{\cos x}_{g_1} dx \\
&= \underbrace{e^x}_{f_1}\underbrace{\cos x}_{g_1} - \int \underbrace{e^x}_{f_1}\underbrace{(}_{} - \sin x)_{{g_1}'} dx \\
&= e^x \cos x + \int \underbrace{e^x}_{{f_2}'}\underbrace{\sin x}_{g_2} dx \\
&= e^x \cos x + \underbrace{e^x}_{f_2}\underbrace{\sin x}_{g_2} - \int \underbrace{e^x}_{g_1}\underbrace{\cos x}_{{g'}_2} dx \\
&= e^x \cos x + e^x \sin x - I \\
2I &= e^x \cos x + e^x \sin x \\
&= e^x(\cos x + \sin x) \\
I &= \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C
\end{aligned}$$

別解

オイラーの式[1]より、

$$\cos x = \mathrm{Re}\left[e^{jx}\right]$$

であるから、

$$I = \mathrm{Re}\left[\int e^x e^{jx} dx\right]$$

と表される。

ここで、

$$\begin{aligned}
&\int e^x e^{jx} dx \\
&= \int e^{(1+j)x} dx \\
&= \frac{1}{1+j}e^{(1+j)x} + C \\
&= \frac{1-j}{(1+j)(1-j)}e^{jx}e^x + C \\
&= \frac{1}{2}(1-j)(\cos x + j\sin x)e^x + C \\
&= \frac{1}{2}\left\{\cos x + \sin x + j(\sin x - \cos x)\right\}e^x + C
\end{aligned}$$

となるので、

$$I = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)e^x + C$$

3 微分方程式

3.1 $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$

解答

両辺を y^2 で割り算すると、

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} = 2x$$

両辺を x で積分すると、左辺は y についての積分に変換できて、

$$\int y^{-2}\frac{dy}{dx}dx = 2\int x dx$$

$$\int y^{-2}dy = 2\int x dx$$

$$\begin{aligned}
-y^{-1} &= x^2 + C \\
y^{-1} &= -(x^2 + C) \\
y &= -\frac{1}{x^2+C}
\end{aligned}$$

解説

変数分離型[2]：

$$y^{-2}dy = 2xdx$$

[1] $e^{jx} = \cos x + j\sin x$

[2] http://www.ee.t-kougei.ac.jp/tuushin/lecture/math2/diffeq/te

と変形できる。

このとき、左辺は y のみ、右辺は x のみに分離できたので、両辺を積分することができる。

$$\int y^{-2}dy = \int 2xdx$$

$$-y^{-1} = x^2 + C$$

$$y = -\frac{1}{x^2 + C}$$

3.2 $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x$

解答

非同次一階線形微分方程式[3]

1. 余関数：

$$\frac{dy_c}{dx} + 2xy_c = 0$$

を解く。

$$\frac{dy_c}{y_c} = -2xdx$$

両辺を積分して、

$$\int \frac{dy_c}{y_c} = -2\int xdx$$

$$\begin{aligned} \log y_c &= -x^2 + C \\ y_c &= e^{-x^2+C} \\ &= e^C e^{-x^2} \\ &= Ae^{-x^2} \end{aligned}$$

2. 上の結果を利用して、もとの方程式の解を

$$y = ue^{-x^2}$$

と表してみる。(定数変化法)

この式を与えられた微分方程式に代入して整理すると、

$$(u'e^{-x^2} - 2xue^{-x^2}) + 2xue^{-x^2} = x$$

$$u'e^{-x^2} = x$$

$$\begin{aligned} u' &= xe^{x^2} \\ u &= \int xe^{x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}e^{x^2} + C \end{aligned}$$

したがって、

$$y = ue^{-x^2} = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$$

[3] http://www.ee.t-kougei.ac.jp/tuushin/lecture/math2/diffeq/text/node6.html

別解 I

非同次一階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

の解

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right\}$$

に対して、

$$P(x) = 2x, \qquad Q(x) = x$$

を適用する。このとき、

$$\begin{aligned} \int P(x)dx &= 2\int xdx = x^2 \\ e^{\pm\int P(x)dx} &= e^{\pm x^2} \\ \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx &= \int xe^{x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int e^u du, \qquad u = x^2 \\ &= \frac{1}{2}e^u \\ &= \frac{1}{2}e^{x^2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} y &= e^{-x^2}\left\{\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right\} \\ &= \frac{1}{2} + Ce^{-x^2} \end{aligned}$$

別解 II

$$\frac{dy}{dx} = -2x(y - \frac{1}{2})$$

と変数分離型に変形できる。

$$\int \frac{dy}{y - \frac{1}{2}} = -2\int xdx$$

$$\log(y - \frac{1}{2}) = -x^2 + C$$

$$y - \frac{1}{2} = e^{-x^2+C}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} + e^C e^{-x^2} \\ &= \frac{1}{2} + Ae^{-x^2} \end{aligned}$$

3.3 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 10\cos x$ (**初期条件: y(0)=y'(0)=0**)

解答

非同次定係数二階線形微分方程式

1. 余関数:

$$y_c'' + 3y_c' + 2y_c = 0$$

を解く。特性方程式を解くと、

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

$$(m+2)(m+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -2, -1$$

が得られるので、

$$y_c = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$$

ここで、C_1, C_2 は積分定数である。

2. 特解

$$y_p = A\cos x + B\sin x$$

と仮定し、もとの微分方程式に代入し y_p が解となるよう係数 A, B を定める。

$$\begin{aligned} y_p' &= -A\sin x + B\cos x \\ y_p'' &= -A\cos x - B\sin x \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} (-A\cos x - B\sin x) + 3(B\cos x - A\sin x) \\ 2(\cos x + B\sin x) &= 10\cos x \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} A + 3B &= 10 \\ B - 3A &= 0 \end{aligned}$$

この方程式を解いて、

$$A = 1, \qquad B = 3$$

以上より、

$$y_p = \cos x + 3\sin x$$

3. 一般解

$$y = y_p + y_c = \cos x + 3\sin x + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$$

4. 初期条件

$$y(0) = y'(0) = 0$$

を満足するよう、上で得られた一般解の定数 C_1, C_2 を決定する。

$$\begin{aligned} y &= \cos x + 3\sin x + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} \\ y' &= -\sin x + 3\cos x - 2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-x} \\ y(0) &= 1 + C_1 + C_2 \ = \ 0 \\ y'(0) &= 3 - 2C_1 - C_2 \ = \ 0 \end{aligned}$$

以上より、

$$C_1 = 4, \quad C_2 = -5$$

したがって、求める解は、

$$y = \cos x + 3\sin x + 4e^{-2x} - 5e^{-x}$$

解説

解を求めるまでの手順

1. 余関数 y_c を求める。
2. 特解 y_p を求める。
3. 一般解: $y = y_c + y_p$
4. 初期条件を満足するよう積分定数の値を求める。

定係数の同次二階線形微分方程式の解法[4]

$$y'' + p_1 y' + p_0 y = 0$$

解を $y = e^{mx}$ と仮定し、上の方程式に代入して定数 m を決定する。

$$m^2 + p_1 m + p_2 = 0 \qquad \text{(特性方程式)}$$

特性方程式の解によって y の表現式は次の 3 つに分類される。

1. 異なる 2 つの実数解 $(m = m_1,\ m_2)$:

   同次線形微分方程式の解の性質より、

   $$y = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x}$$

   ただし、A, B は任意の定数 (積分定数) である。

2. 重解 $(m = m_0)$:

   $$y = (Ax + B)e^{m_0 x}$$

3. 複素解 $(m = \alpha \pm j\beta)$:

   $$\begin{aligned} y &= Ae^{(\alpha + j\beta)x} + Be^{(\alpha - j\beta)x} \\ &= (Ae^{j\beta x} + Be^{-j\beta x})e^{\alpha x} \end{aligned}$$

   あるいは、オイラーの式を利用して、

   $$y = (C\cos\beta x + D\sin\beta x)e^{\alpha x}$$

   と表すこともできる。

[4] http://www.ee.t-kougei.ac.jp/tuushin/lecture/math2/diffeq/te