再試験 (2004.1.21) の解答

1 微分

1.1 $y=(x^2-x+1)^9$

解答

$$
\begin{aligned}
y' &= 9(x^2-x+1)^8 \times (x^2-x+1)' \\
&= 9(x^2-x+1)^8 \times (2x-1)
\end{aligned}
$$

詳しい解答

$$t=x^2-x+1$$

と置くと、

$$y=t^9, \qquad (t=x^2-x+1)$$

と表されるので、

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \\
&= \left\{\frac{d}{dt}t^9\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}(x^2-x+1)\right\} \\
&= 9t^8 \times (2x-1) \\
&= 9(2x-1)(x^2-x+1)^8
\end{aligned}
$$

1.2 $y=e^x(\cos x+\sin x)$

解答

$$
\begin{aligned}
y' &= (e^x)'(\cos x+\sin x)+e^x(\cos x+\sin x)' \\
&= e^x(\cos x+\sin x)+e^x(-\sin x+\cos x) \\
&= 2e^x\cos x
\end{aligned}
$$

捕捉説明

積の微分

$$(f\cdot g)'=f'g+fg'$$

三角関数、指数関数の微分

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= -\sin x \\
(e^x)' &= e^x
\end{aligned}
$$

1.3 $y=xe^{x+1}$

解答

$$
\begin{aligned}
y' &= x'e^{x+1}+x(e^{x+1})' \\
&= e^{x+1}+xe^{x+1} \\
&= (x+1)e^{x+1}
\end{aligned}
$$

捕捉説明

$$
\begin{aligned}
e^{x+1} &= e^t, \qquad (t=x+1) \\
\frac{d}{dx}e^{x+1} &= \frac{d}{dx}e^t, \qquad (t=x+1) \\
&= \left(\frac{d}{dt}e^t\right)\times\left\{\frac{d}{dx}(x+1)\right\} \\
&= e^t\times 1 \\
&= e^{x+1}
\end{aligned}
$$

1.4 $y=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$

解答

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{x'\sqrt{x-1}-x(\sqrt{x-1})'}{(\sqrt{x-1})^2} \\
&= \frac{\sqrt{x-1}-x\times\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} \\
&= \frac{2(x-1)-x}{2(x-1)\sqrt{x-1}} \\
&= \frac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}
\end{aligned}
$$

別解

$$
\begin{aligned}
y &= x(x-1)^{-\frac{1}{2}} \\
y' &= x'(x-1)^{-\frac{1}{2}}+x\left\{(x-1)^{-\frac{1}{2}}\right\}' \\
&= (x-1)^{-\frac{1}{2}}+x\times\left\{-\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}}\right\} \\
&= (x-1)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x(x-1)^{-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\{2(x-1)-x\}(x-1)^{-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{2}(x-2)(x-1)^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

解説

商の微分

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{x-1})' &= \left\{(x-1)^{\frac{1}{2}}\right\}' \\
&= \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2(x-1)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

1.5 $y = \sin\sqrt{x}$

解答

$$\begin{aligned} y' &= (\cos\sqrt{x}) \times (\sqrt{x})' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} \end{aligned}$$

詳しい解答

$$y = \sin t, \qquad (t = \sqrt{x})$$

と表されるので、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \\ &= \left\{\frac{d}{dt}\sin t\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right\} \\ &= (\cos t) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} \end{aligned}$$

1.6 $y = \log(\sqrt{x} - 1)$

解答

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sqrt{x}-1} \times (\sqrt{x}-1)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \end{aligned}$$

詳しい解答

$$t = \sqrt{x} - 1$$

と置くと、

$$\begin{aligned} y &= \log t, \qquad (t = \sqrt{x} - 1) \\ \frac{dy}{dt} &= (\log t)' = \frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \\ \frac{dt}{dx} &= (\sqrt{x}-1)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \end{aligned}$$

2 積分

2.1 $I = \int \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 dx$

解答

$$\begin{aligned} I &= \int (x + x^{-1})^3 dx \\ &= \int (x^3 + 3x^2x^{-1} + 3xx^{-2} + x^{-3}) dx \\ &= \int (x^3 + 3x + 3x^{-1} + x^{-3}) dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 3\log x - \frac{1}{2}x^{-2} + C \end{aligned}$$

ここで、C は積分定数 (任意の定数) を表す。(以下同様)

別解

$$I = \int \frac{(x^2+1)^3}{x^3} dx$$

$u = x^2$ と置くと、

$$x^2 = u, \qquad x = \sqrt{u}, \qquad dx = \frac{1}{2\sqrt{u}}du$$

であるから、

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(u+1)^3}{(\sqrt{u})^3}\frac{1}{2\sqrt{u}}du \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{u^3 + 3u^2 + 3u + 1}{u^2} du \\ &= \frac{1}{2}\int (u + 3 + \frac{3}{u} + \frac{1}{u^2}) du \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}u^2 + 3u + 3\log u - \frac{1}{u}) + C \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 + 3\log x^2 - \frac{1}{x^2}) + C \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 + 6\log x - \frac{1}{x^2}) + C \end{aligned}$$

解説

$$\int x^p dx = \begin{cases} \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C & (p \neq -1) \\ \log x + C & (p = -1) \end{cases}$$

2.2 $I = \int \frac{x}{x^2+1} dx$

解答

$u = x^2 + 1$ と置くと、

$$du = 2xdx, \qquad xdx = \frac{1}{2}du$$

であるから、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{2}\log u + C \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C \end{aligned}$$

別解答

$$x^2+1 = (x+j)(x-j)$$

と因数分解できるので、

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{x}{(x+j)(x-j)} = \frac{A}{x+j} + \frac{B}{x-j}$$

と展開する。このときの展開係数は、

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{x}{x-j}\right|_{x=-j} = \frac{1}{2} \\ B &= \left.\frac{x}{x+j}\right|_{x=j} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \left\{\frac{1}{x+j} + \frac{1}{x-j}\right\} dx \\ &= \frac{1}{2}\left\{\log(x+j) + \log(x-j)\right\} + C \\ &= \frac{1}{2}\log\{(x+j)(x-j)\} + C \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C \end{aligned}$$

2.3 $I = \int e^{x+\log x} dx$

解答

$$e^{x+\log x} = e^x e^{\log x} = e^x x$$

と変形できるので、

$$I = \int x e^x dx$$

部分積分により、

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{x}_{f}\underbrace{e^x}_{g'} dx = \underbrace{x}_{f}\underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \times \underbrace{e^x}_{g} dx \\ &= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C \\ &= (x-1)e^x + C \end{aligned}$$

解説

部分積分[1]：

$$\int fg'dx = fg - \int f'gdx$$

2.4 $I = \int x \log x dx$

解答

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{x}_{f'}\underbrace{\log x}_{g} dx \\ &= \int \underbrace{(\frac{1}{2}x^2)'}_{f'}\underbrace{\log x}_{g} dx \\ &= \underbrace{(\frac{1}{2}x^2)}_{f}\underbrace{\log x}_{g} - \int \underbrace{(\frac{1}{2}x^2)}_{f'}\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{2}\int x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + C \end{aligned}$$

別解

$$u = \log x$$

と変換すると、

$$x = e^u, \qquad dx = e^u du$$

であるから、

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{x}_{e^u}\underbrace{\log x}_{u}\underbrace{dx}_{e^u du} \\ &= \int e^u u e^u du \\ &= \int u e^{2u} du \\ &= \int \underbrace{u}_{f} \times \underbrace{\left(\frac{1}{2}e^{2u}\right)'}_{g'} du \\ &= \underbrace{u}_{f} \times \underbrace{\frac{1}{2}e^{2u}}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \times \underbrace{\frac{1}{2}e^{2u}}_{g} du \\ &= \frac{1}{2}ue^{2u} - \frac{1}{2}\int e^{2u} du \\ &= \frac{1}{2}ue^{2u} - \frac{1}{4}e^{2u} + C \\ &= \frac{1}{2}(\log x)x^2 - \frac{1}{4}x^2 + C \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + C \end{aligned}$$

注意

$$e^{p\log x} = e^{\log x^p} = x^p$$

[1] http://www.ee.t-kougei.ac.jp/tuushin/lecture/math2/integration/sekibun/node6.html

2.5 $I = \int \frac{dx}{x^2+6x+5}$

解答

部分分数展開[2]：

$$\frac{1}{x^2+6x+5} = \frac{1}{(x+1)(x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+5}$$

と展開する。

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{1}{x+5}\right|_{x=-1} = \frac{1}{4} \\ B &= \left.\frac{1}{x+1}\right|_{x=-5} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4}\int \left\{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+5}\right\} dx \\ &= \frac{1}{4}\{\log(x+1) - \log(x+5)\} + C \\ &= \frac{1}{4}\log\frac{x+1}{x+5} + C \end{aligned}$$

2.6 $I = \int (x+1)\cos x dx$

解答

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{(x+1)}_{f} \times \underbrace{(\sin x)'}_{g'} dx \\ &= \underbrace{(x+1)}_{f} \times \underbrace{\sin x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \times \underbrace{\sin x}_{g} dx \\ &= (x+1)\sin x - \int \sin x dx \\ &= (x+1)\sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

3 微分方程式

3.1 $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}e^{-y}$

解答

変数分離型：

$$e^y dy = \sqrt{x}dx$$

両辺を積分して、

$$\begin{aligned} \int e^y dy &= \int \sqrt{x}dx \\ e^y &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \\ y &= \log(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C) \end{aligned}$$

3.2 $x^2\frac{dy}{dx} + xy = 1$

解答

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

であるから、

$$P(x) = \frac{1}{x}, \qquad Q(x) = \frac{1}{x^2}$$

として、

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

の解

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right\}$$

に代入する。

$$\begin{aligned} \int P(x)dx &= \int \frac{1}{x}dx = \log x \\ e^{-\int P(x)}dx &= e^{-\log x} = \frac{1}{x} \\ Q(x)e^{\int P(x)dx}dx &= \int \frac{1}{x^2} \times e^{\log x}dx \\ &= \int \frac{1}{x^2} \times xdx \\ &= \int \frac{1}{x}dx \\ &= \log x \end{aligned}$$

であるから、

$$y = \frac{1}{x}\{\log x + C\}$$

別解

1. 余関数:

$$x^2\frac{dy_c}{dx} + xy_c = 0$$

を解く。

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_c}\frac{dy_c}{dx} &= -\frac{1}{x} \\ \int \frac{dy_c}{y_c} &= -\int \frac{dx}{x} \\ \log y_c &= -\log x + C \\ y_c &= e^{-\log x + C} = Ae^{-\log x} \\ &= \frac{A}{x} \end{aligned}$$

2. 一般解

定数変化法にしたがって、解を

$$y = \frac{u(x)}{x}$$

[2] http://www.ee.t-kougei.ac.jp/tuushin/lecture/math2/integration/sekibun/node9.html

と置き、与えられた微分方程式に代入して整理すると、

$$x^2\left\{\frac{u}{x}\right\}' + x \times \frac{u}{x} = 1$$

$$xu' = 1$$

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{x} \\ u &= \int \frac{1}{x}dx \\ &= \log x + C \\ y &= \frac{u}{x} \\ &= \frac{1}{x}(\log x + C) \end{aligned}$$

3.3 $y'' + 3y' + 2y = 10\sin x$, (初期条件: y(0)=y'(0)=0)

解答

1. 余関数：

$$y_c'' + 3y_c' + 2y_c = 0$$

を解く。

補助方程式

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

より、

$$(m+2)(m+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -2, -1$$

$$y_c = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$$

2. 特解

$$y_p = a\cos x + b\sin x$$

が与えられた微分方程式の特解となるよう、定数 a, b を定める。

$$\begin{aligned} 2y_p &= 2a\cos x + 2b\sin x \\ 3y_p' &= 3b\cos x - 3a\sin x \\ y_p'' &= -a\cos x - b\sin x \end{aligned}$$

であるから、これらを与えられた微分方程式に代入すると、

$$(a+3b)\cos x + (b-3a)\sin x = 10\sin x$$

したがって、

$$\begin{aligned} a + 3b &= 0 \\ b - 3a &= 10 \end{aligned}$$

これを解いて、

$$a = -3, \qquad b = 1$$

したがって、

$$y_p = -3\cos x + \sin x$$

は与えられた微分方程式の特解である。

3. 一般解:

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} - 3\cos x + \sin x \end{aligned}$$

4. 初期条件： $y(0) = y'(0) = 0$

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} - 3\cos x + \sin x \\ y'(x) &= -2C_1e^{-2x} - C_2e^{-x} + 3\sin x + \cos x \\ y(0) &= C_1 + C_2 - 3 \ = \ 0 \\ y'(0) &= -2C_1 - C_2 + 1 \ = \ 0 \\ C_1 &= -2 \\ C_2 &= 5 \end{aligned}$$

したがって、求める解は、

$$y = -2e^{-2x} + 5e^{-x} - 3\cos x + \sin x$$