3　微分方程式

未知関数の微分 (導関数) を含む未知関数についての方程式を微分方程式という。

物理現象を数学的に記述しようとすると、微分や積分を用いて表されることが多い。したがって、物理法則から現象を理解するには微分方程式 (積分方程式) の知識が必要となる。

3.1　変数分離型

変数分離型 –

x を独立変数、$y = y(x)$ を未知関数とするとき、

$$\frac{dy}{dx} = F(x)G(y)$$

の形式をした微分方程式は、次のようにして解を得ることができる。

$$\frac{1}{G(y)}dy = F(x)dx$$

$$\int \frac{1}{G(y)}dy = \int F(x)dx + C$$

[例題]

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

を解く。

$$\frac{1}{y}dy = 2xdx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = 2\int xdx$$

$$\log|y| = x^2 + C$$

$$|y| = e^{x^2+C}$$

$$y = Ae^{x^2}$$

ただし、A は積分定数 (任意の定数) である。

同次型 –

$$\frac{dy}{dx} = F(\frac{y}{x})$$

と表される微分方程式を同次形と呼ぶ。この方程式は、$u = \frac{y}{x}$ と変数変換して、解くことができる。

$$y = ux \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

より、上の微分方程式を書き換えると、

$$u + x\frac{du}{dx} = F(u)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{F(u) - u}{x}$$

$$\int \frac{1}{F(u) - u}du = \int xdx + C$$

[例]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 1$$

変数変換 $u = \frac{y}{x}$ により、$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ であるから、与えられた微分方程式は次のように変形できる。

$$u + x\frac{du}{dx} = u + 1 \qquad \rightarrow \qquad \int du = \int \frac{1}{x}dx$$

$$u = \log x + C$$

$$y = x(\log x + C)$$

ただし、任意の C は定数である。

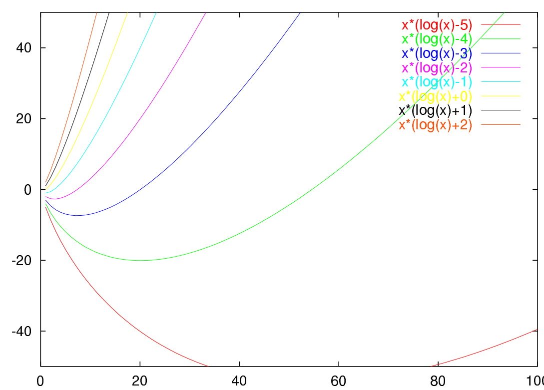

図 1: $y = x(\log x + C)$

3.1.1　例題

[1] $\frac{dy}{dx} + y = 2$

y' について解くと、

$$\frac{dy}{dx} = -y + 2$$

ここで、$w = y - 2$ と置くと、$\frac{dw}{dx} = \frac{dy}{dx}$ であるから、

$$\frac{dw}{dx} = -w \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dw}{w} = -dx$$

両辺を積分して、

$$\int \frac{dw}{w} = -\int dx \quad \Rightarrow \quad \log w = -x + C$$

$$\begin{aligned} w &= e^{-x+C} = e^C e^{-x} = Ae^{-x} \\ y &= Ae^{-x} + 2 \end{aligned}$$

ただし、A は任意の定数

[2] $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\ ydy &= -xdx \quad \Rightarrow \quad \int ydy = -\int xdx \\ \frac{1}{2}y^2 &= -\frac{1}{2}x^2 + C \end{aligned}$$

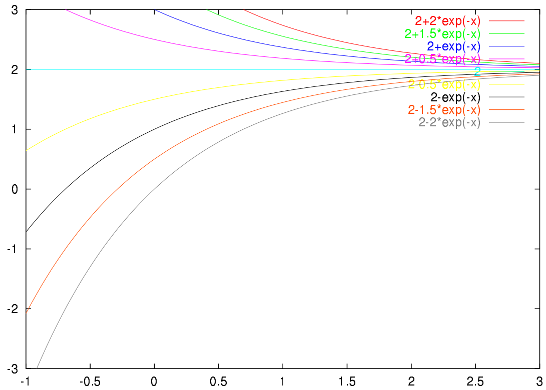

図 2: $y = Ae^{-x} + 2$

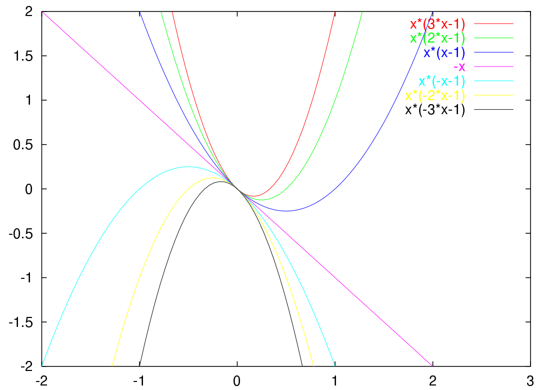

図 3: $y = x(Ax - 1)$

$$x^2 + y^2 = A, \qquad (A = 2C)$$

ただし、A は任意の定数である。

[3] $\dfrac{dy}{dx} + y^2 x = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -2y^2 x \\
\frac{dy}{y^2} &= -2x \quad \Rightarrow \quad \int y^{-2} dy = -2\int x dx \\
-\frac{1}{y} &= -x^2 + C \\
y &= \frac{1}{x^2 - C}
\end{aligned}$$

ここで、C は任意の定数である。

[4] $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y + x}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{y}{x} + 1$$

と変形できるので、$y(x) = x \times u(x)$ と変換する (同次型)。このとき、$y'(x) = x \times u'(x) + u(x)$ であるから、

$$x\frac{du}{dx} + u = 2u + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{u+1}{x}$$

$$\int \frac{du}{u+1} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \log(u+1) = \log x + C$$

$$u + 1 = e^{\log x + C} = xe^C = Ax$$

$$y = x \times u = x(Ax - 1)$$

ただし、A は任意の定数

3.2 同次線形微分方程式

3.2.1 一階線形同次微分方程式

未知関数を (x) とするとき、y' および、y についての 1 次式で表される次の形式の微分方程式を同次 (斉次、整次、homogenious) な 1 次 (1 階) 線形微分方程式と呼ぶ。

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

この方程式は変数分離型であるので次のようにして解くことができる。

$$\frac{1}{y}dy = -p(x)dx$$

$$\frac{1}{y}dy = -p(x)dx$$

$$\log y = -\int p(x)dx + C$$

$$y = Ae^{-\int p(x)dx}$$

3.2.2 一階線形非同次微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

を非同次な 1 階線形微分方程式と呼んでいる。この方程式は、$q(x) = 0$ と置き換えて得られる同次微分方程式の解 (y_c: 余関数) を利用して次のようにして解くことができる。

同次微分方程式の解

$$y_c(x) = Ae^{-\int p(x)dx}$$

を利用して、解を

$$y = u(x)e^{-\int p(x)dx}$$

と仮定し、もとの方程式に代入して整理する:

$$\frac{du(x)}{dx} \times e^{-\int p(x)dx} + u(x) \times \frac{d}{dx}\left\{e^{-\int p(x)dx}\right\}$$

$$+p(x) \times u(x) \times e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$\frac{du}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C$$

したがって、

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left\{C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}\right\}$$

この解法は定数変化法と呼ばれている。

3.3　例題

[1] $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x^3$

補助方程式:

$$\frac{dy_c}{dx} + 2xy_c = 0$$

を解くと、

$$\frac{dy_c}{y_c} = -2xdx$$

$$\log y_c = -x^2 + C$$

$$y_c = e^{C-x^2} = Ae^{-x^2}$$

であるから、与えられた方程式の解を $y = u(x)e^{-x^2}$ と置き換え、もとの方程式に代入して整理する。

$$\frac{du(x)}{dx}e^{-x^2} = 4x^3$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= 4x^3e^{x^2} \\ u(x) &= 4\int x^2e^{x^2}dx \end{aligned}$$

$t = x^2$ と置くと、$dt = 2xdx$ であるから、

$$\begin{aligned} u(x) &= 2\int \underbrace{t}_{f} \times \underbrace{e^t}_{g'} dt \\ &= 2\underbrace{t}_{f} \times \underbrace{e^t}_{g} - 2\int \underbrace{1}_{f'} \times \underbrace{e^t}_{g} dt \\ &= 2(t-1)e^t + C = 2(x^2-1)e^{x^2} + C \end{aligned}$$

したがって、

$$y = ue^{-x^2} = 2(x^2-1) + Ce^{-x^2}$$

[別解]

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C\right\}$$

$$P(x) = 2x, \qquad Q(x) = 4x^3$$

であり、

$$\begin{aligned} \int P(x)dx &= 2\int xdx = x^2 + C_1 \\ \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx &= 4\int x^2e^{x^2}dx \\ &= 2(x^2-1)e^{x^2} + C_2 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} y &= e^{-x^2}\left\{2(x^2-1)e^{x^2} + C\right\} \\ &= 2(x^2-1) + Ce^{-x^2} \end{aligned}$$

[2] $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y = 2$

補助方程式

$$\frac{dy_c}{dx} + \frac{1}{x}y_c = 0$$

を解く。

$$\frac{dy_c}{y_c} = -\frac{dx}{x} = 0$$

$$\log y_c = -\log x + C$$

$$y_c = e^{-\log x + C} = \frac{e^C}{x} = \frac{A}{x}$$

であるから、解を $y = \dfrac{u(x)}{x}$ と置いて元の方程式に代入して整理する。

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= 2x \\ u &= \int 2xdx = x^2 + C \\ y &= \frac{u}{x} = \frac{x^2 + C}{x} \end{aligned}$$

3.4　線形微分方程式の性質

3.4.1　同次線形微分方程式

$y_1(x), y_2(x)$ が解ならば

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

も解である。

3.4.2　非同次線形微分方程式

非同次方程式の解 y_p と右辺を 0 で置き換えた同次方程式 (補助方程式) の解 y_c との和

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

も非同次方程式の解である。

3.5　定係数同次線形微分方程式の解法

線形微分方程式の係数がすべて定数である場合には、簡単な解法が知られている。解を

$$y = e^{mx}$$

と仮定し、もとの微分方程式に代入すると、m についての代数方程式が得られる。(補助方程式)

これを解いて、定数 m を決定する。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6 = 0$$

解を指数関数 $y=e^{mx}$ と仮定して、上の微分方程式に代入し、整理する。このとき、指数関数の微分は係数の値が変わることを除いて同じ指数関数であることから、

$$m^2e^{mx}+5me^{mx}+6e^{mx}=0$$

$$m^2+5m+6=0$$

$$(m+2)(m+3)=0$$

$$m=-2,\ -3$$

同次線形微分方程式の性質を利用して、

$$y=Ae^{-2x}+Be^{-3x}$$

3.5.1 定係数 2 階線形微分方程式の解法

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p_1\frac{dy}{dx}+p_2y=0$$

解を

$$y=e^{mx}$$

と仮定し、与えられた微分方程式に代入して整理する。

$$(e^{mx})''+p_1(e^{mx})'+p_2e^{mx}=0$$

$$m^2e^{mx}+p_1me^{mx}+p_2e^{mx}=0$$

$$(m^2+p_1m+p_2)e^{mx}=0$$

上の式がどのような x についても成立するには、

$$m^2+p_1m+p_2=0$$

であればよい。これをもとの方程式の特性方程式と呼ぶ。

特性方程式は 2 次方程式であるから、解が 2 つ存在する。いま、この解を $m_1,\,m_2$ と表すと、

$$y=e^{m_1x},\qquad y=e^{m_2x}$$

のどちらも元の微分方程式を満足する（解である）。

線形微分方程式の性質から、複数の解の線形和 (定数をかけ算して加え合わせたもの) も解となる (もとの微分方程式に代入してみれば、左辺が右辺と等しく 0 となる)。

したがって、求める方程式の解は、

$$y=Ae^{m_1x}+Be^{m_2x}$$

である。ただし、A,B は任意の定数である。

ここで、特性方程式の解が

- 複素解の場合:

$$m=m_r\pm jm_i$$

であるとき (p_1,p_2 が実数なら、2 つの複素解は互いに複素共役になる。)、オイラー (Euler) の式

$$e^{\pm jm_ix}=\cos m_ix\pm j\sin m_ix$$

より、解は

$$\begin{aligned} y &= Ae^{(m_r+jm_i)x}+Be^{(m_r-jm_i)x}\\ &= e^{m_rx}\{A(\cos m_ix+j\sin m_ix)\\ &\qquad +B(\cos m_ix-j\sin m_ix)\}\\ &= e^{m_rx}\{(A+B)\cos m_ix+j(A-B)\sin m_ix\}\\ &= e^{m_rx}\{C\cos m_ix+D\sin m_ix\} \end{aligned}$$

と変形できる。ただし、$C[=A+B],D[=j(A-B)]$ は定数である。

- $m_1=m_2$ の場合:

e^{m_1x} と e^{m_2x} が同じ関数となる。このような場合を解が縮退しているという。

$$y=Ae^{m_1x}+Be^{m_2x}=A(e^{m_1x}-e^{m_2x})+(A+B)e^{m_2x}$$

において、$m_1\to m_2$ とすると、右辺の第 1 項が 0 となる。

積分定数は x に依らない任意の定数であるから、$A=\dfrac{C}{m_1-m_2}$ として、右辺の第 1 項が定数に収束するように積分定数を選ぶ。このとき、

$$\begin{aligned} y &= C\times\frac{e^{m_1x}-e^{m_2x}}{m_1-m_2}+De^{m_2x}\\ &\to Cxe^{m_2}+De^{m_2x},\quad (m_1\to m_2) \end{aligned}$$

が得られる。したがって、方程式の解は e^{m_2x} と xe^{m_2x} の線形和

$$y=(Cx+D)e^{m_2x}$$

である。

$$\lim_{m_1\to m_2}\frac{e^{m_1x}-e^{m_2x}}{m_1-m_2}=xe^{m_2x}$$

[証明] $m_2=t,\ m_1=t+h,\ x=a$ と置き換えると左辺は、

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{a(t+h)}-e^{at}}{h}\ =\ \frac{d}{dt}\left\{e^{at}\right\}\ =\ ae^{at}$$

と変形できることから右辺が導出される。

3.6 非同次線形微分方程式の一般解の求め方

3.6.1 特殊解を利用する場合

1. 非同次方程式を満足する解 (一般解でなくてもよい)y_p を発見する。[特 (殊) 解]

2. 補助方程式 (同次線形微分方程式) の一般解 y_c を求める。[余関数]

3. 特殊解 (y_p) と余関数 (y_c) の和が求める非同次線形微分方程式の一般解となる。

$$y = y_p + y_c$$

3.6.2　定数変化法を利用する場合

1. 補助方程式 (同次線形微分方程式) の一般解を求める。[余関数]

2. 余関数中に含まれる積分定数を関数で置き換え、元の非同次方程式に代入して得られる、置き換えた関数についての微分方程式を解く。

3.6.3　例

例題 1

$$\frac{dy}{dx} + 2y = xe^{-x}$$

特殊解を利用する場合

1. 上の方程式の解を

$$y_p = (ax + b)e^{-x}$$

と仮定する。

$$\begin{aligned} {y_p}' &= ae^{-x} - (ax+b)e^{-x} \\ 2y &= 2(ax+b)e^{-x} \end{aligned}$$

であるから、上のように仮定することで、a, b を適切に選べば、左辺が右辺と等しくなることが期待できる。

y_p をもとの方程式に代入し、方程式が成立するよう定数 a, b を決定する。

$$\{(ax+b)e^{-x}\}' + 2(ax+b)e^{-x} = xe^{-x}$$

$$\{ae^{-x} - (ax+b)e^{-x}\} + 2(ax+b)e^{-x} = xe^{-x}$$

両辺を e^{-x} で割算し、整理する。

$$ax + a + b = x$$

この式が x の値によらず成立するには、

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ a + b &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -1 \end{aligned}$$

したがって、

$$y_p = (x-1)e^{-x}$$

は与えられた微分方程式の解である。この解には積分定数が含まれないので、一般解ではなく、特殊解である。

2. 補助方程式

$$\frac{dy_c}{dx} + 2y_c = 0$$

を解く。

特性方程式より、

$$m + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad m = -2$$

余関数が求まる:

$$y_c = Ae^{-2x}$$

3. したがって、求める方程式の一般解は

$$y = y_c + y_p = Ae^{-2x} + (x-1)e^{-x}$$

定数変化法

1. 先に求めたように、補助方程式を解いて余関数

$$y_c = Ae^{-2x}$$

が得られる。

2. 上式の A を $u(x)$ で置き換えて、元の微分方程式に代入する。

$$\{u(x)e^{-2x}\}' + 2u(x)e^{-2x} = xe^{-x}$$

$$u'(x)e^{-2x} = xe^{-x}$$

$$\begin{aligned} u'(x) &= xe^{x} \\ u(x) &= \int xe^{x}dx \end{aligned}$$

部分積分により、

$$\begin{aligned} u(x) &= xe^{x} - \int e^{x}dx \\ &= xe^{x} - e^{x} + C \\ &= (x-1)e^{x} + C \end{aligned}$$

3. したがって、求める方程式の一般解は、

$$\begin{aligned} y &= \{(x-1)e^{x} + C\}e^{-2x} \\ &= (x-1)e^{-x} + Ce^{-2x} \end{aligned}$$

例題 2

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = xe^{-x}$$

特殊解を利用する場合

1. 上の方程式の解を

$$y_p = (ax+b)e^{-x}$$

と仮定する。

y_p をもとの方程式に代入し、方程式が成立するよう定数 a, b を決定する。

$$\{(ax+b)e^{-x}\}'' + 5\{(ax+b)e^{-x}\}' + 6(ax+b)e^{-x} = xe^{-x}$$

$$\{ax-(2a-b)\}e^{-x} + 5\{-ax+(a-b)\}e^{-x} + 6(ax+b)e^{-x} = xe^{-x}$$

両辺を e^{-x} で割算し、整理する。

$$2ax + 4a + 2b = x$$

この式が x の値によらず成立するには、

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \\ b &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

したがって、特殊解として

$$y_p = \frac{2x-3}{4}e^{-x}$$

が得られる。

2. 補助方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

を解く。

特性方程式より、

$$m^2 + 5m + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad m = -2, -3$$

余関数が求まる:

$$y_c = Ae^{-2x} + Be^{-3x}$$

3. したがって、求める方程式の一般解は

$$y = y_c + y_p = y_c = Ae^{-2x} + Be^{-3x} + \frac{2x-3}{4}e^{-x}$$

<u>定数変化法</u>

1. 先に求めたように、補助方程式を解いて余関数

$$y_c = Ae^{-2x} + Be^{-3x}$$

が得られる。

2. 上式の A, B を $u_1(x), u_2(x)$ で置き換えて、元の微分方程式に代入する。

$$\begin{aligned} y &= u_1 e^{-2x} + u_2 e^{-3x} \\ y' &= u_1{}' e^{-2x} + u_2{}' e^{-3x} \\ & \quad -2u_1 e^{-2x} - 3u_2 e^{-3x} \end{aligned}$$

であるから、

$$u_1{}' e^{-2x} + u_2{}' e^{-3x} = 0 \tag{1}$$

となるように、u_1, u_2 を選ぶ。このとき、

$$\begin{aligned} y' &= -2u_1 e^{-2x} - 3u_2 e^{-3x} \\ y'' &= -2u_1{}' e^{-2x} - 3u_2{}' e^{-3x} \\ & \quad +4u_1 e^{-2x} + 9u_2 e^{-3x} \end{aligned}$$

となるので、元の微分方程式に代入して整理すると、

$$-2u_1{}' e^{-2x} - 3u_2{}' e^{-3x} = xe^{-x}$$

が得られる。

この式と、式 (1) を連立方程式として、$u_1{}', u_2{}'$ について解くと、

$$\begin{aligned} u_1{}' &= xe^{x} \\ u_2{}' &= -xe^{2x} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} u_1 &= \int xe^x dx = (x-1)e^x + A \\ u_2 &= -\int xe^{2x} dx = -\frac{2x-1}{4}e^{2x} + B \end{aligned}$$

以上より、

$$\begin{aligned} y &= \{(x-1)e^x + A\}e^{-2x} + \{-\frac{2x-1}{4}e^{2x} + B\}e^{-3x} \\ &= \frac{2x-3}{4}e^{-x} + Ae^{-2x} + Be^{-3x} \end{aligned}$$

3.7 初期値問題 (初期条件)

物体の運動を微分方程式を解いて決定しようとする場合、運動開始時での状態 (初期状態) を指定する必要がある。このような問題を初期値問題と呼び、指定する条件を初期条件と呼ぶ。

3.8 演習問題と解答例

3.9 定係数線形微分方程式