学籍番号:__________________ 氏　名:____________________________________

次の式を x についての関数とみなし微分せよ。

(1) $(3x+2)^4$

(4) $\cos^2 x$

(2) $\sqrt{x^2+1}$

(5) $\dfrac{(x+1)^2}{x+3}$

(3) xe^x

(6) $\dfrac{e^{-x}}{x+2}$

学籍番号:__________________ 氏　名:____________________________________

次の関数を x について微分せよ。

(1) $y = x^3 - x^2 + 4$

(2) $y = (x^2 + 1)^3$

(3) $y = x + \dfrac{1}{x}$

(4) $y = \sqrt[3]{x + 2}$

(5) $y = \sqrt{x^3}$

(6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(7) $y = x\sqrt{x + 1}$

(8) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

(9) $y = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$

(10) $y = \sqrt{x + \dfrac{1}{x}}$

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿　氏　名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

次の関数を x について微分せよ。

(1) $y = x^3 - x^2 + 4$

$$\begin{aligned} y' &= (x^3)' - (x^2)' + 4' \\ &= 3x^2 - 2x + 0, \quad [(x^p) = px^{p-1}] \end{aligned}$$

(2) $y = (x^2+1)^3$
$t = x^2 + 1$ と置くと、

$$\begin{aligned} y &= t^3 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= (t^3)' \cdot (x^2+1)' \\ &= 3t^2 \times 2x \\ &= 6x(x^2+1)^2 \end{aligned}$$

(3) $y = x + \dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned} y' &= x' + \left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= x' + (x\{-1\})' \\ &= 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

(4) $y = \sqrt[3]{x+2}$
$t = x + 2$ と置くと、

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{t} = t^{1/3} \\ y' &= \frac{1}{3}t^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x+2}} \end{aligned}$$

(5) $y = \sqrt{x^3}$

$$\begin{aligned} y &= x^{3/2} \\ y' &= \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

(6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} y &= x^{-1/2} \\ y' &= -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \end{aligned}$$

(7) $y = x\sqrt{x+1}$

$$\begin{aligned} y &= x \times (x+1)^{1/2} \\ y' &= x' \times (x+1)^{1/2} + x \times \{(x+1)^{1/2}\}' \\ &= (x+1)^{1/2} + x \times \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} \\ &= \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{2(\sqrt{x+1})^2 + x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

(8) $y = \dfrac{x^2+1}{x+1}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2+1)'(x+1) - (x^2+1)(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

(9) $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x+1)'\sqrt{x} - (x+1)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{\sqrt{x} - \frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= \frac{2(\sqrt{x})^2 - (x+1)}{2x\sqrt{x}} \\ &= \frac{x-1}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(10) $y = \sqrt{x + \dfrac{1}{x}}$
$t = x + \dfrac{1}{x}$ と置くと、

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{t} \\ \frac{dy}{dx} &= (\sqrt{t})' \times (x + \frac{1}{x})' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{t}} \times (1 - \frac{1}{x^2}) \\ &= \frac{x^2-1}{2x^2\sqrt{x+\frac{1}{x}}} \end{aligned}$$

[公式]

$$\begin{aligned} (x^p)' &= px^{p-1} \\ (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} \end{aligned}$$

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿　氏　名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

次の関数を x について微分せよ。

(1) $y = e^{x^2+1}$

(2) $y = xe^x$

(3) $y = e^x + e^{-x}$

(4) $y = \sin x \cos 2x$

(5) $y = \sin \dfrac{1}{x}$

(6) $y = \log(x^2 + 1)$

(7) $y = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

(8) $y = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

(9) $y = \sin^{-1} x$

(10) $y = (\sin x)^{-1}$

(11) $f(x) = (x + 1)\sin x$ とする。このとき、$f'(\pi)$ を計算せよ。

(12) $f(x) = e^{2jx}$ とする。このとき、$f'(\pi)$ を計算せよ。

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿　氏　名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

次の関数を x について微分せよ。

(1) $y = e^{x^2+1}$

$t = x^2 + 1$ と置いて、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{de^t}{dt} \times \frac{d(x^2+1)}{dx} \\ &= e^t \times (2x) \\ &= 2xe^{x^2+1}\end{aligned}$$

あるいは、簡単に

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2+1}(x^2+1)' = 2xe^{x^2+1}$$

(2) $y = xe^x$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x'e^x + x(e^x)' \\ &= e^x + xe^x = (x+1)e^x\end{aligned}$$

(3) $y = e^x + e^{-x}$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + e^{-x}(-x)' = e^x - e^{-x}$$

(4) $y = \sin x \cos 2x$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (\sin x)' \cos 2x + \sin x(\cos 2x)' \\ &= \cos x \cos 2x + \sin x \times \{(-\sin 2x) \times (2x)'\} \\ &= \cos x \cos 2x - 2\sin x \sin 2x\end{aligned}$$

(5) $y = \sin \dfrac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x}\right)' \cos\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$$

(6) $y = \log(x^2+1)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$$

(7) $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(1-\sqrt{x})'(1+\sqrt{x}) - (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}) - (1-\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{-(1+\sqrt{x}) - (1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\end{aligned}$$

[別解] $t = \sqrt{x}$ と置き換える。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \\ &= \left(\frac{1-t}{1+t}\right)' (\sqrt{x})' \\ &= \frac{(1-t)'(1+t) - (1-t)(1+t)'}{(1+t)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{-(1+t) - (1-t)}{(1+t)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= -\frac{1}{(1+t)^2} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

(8) $y = \dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$t = e^{-x}$ と置き換える。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left(\frac{1-t}{1+t}\right)' (e^{-x})' = -\frac{2}{(1+t)^2}(-e^{-x}) \\ &= \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\end{aligned}$$

(9) $y = \sin^{-1} x$

$$\begin{aligned}x &= \sin y \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\sin y)'} \\ &= \frac{1}{\cos y} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \\ &= \pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

(10) $y = (\sin x)^{-1}$ $t = \sin x$ と置き換えて、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = (t^{-1})'(\sin x)' \\ &= -t^{-2}\cos x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

(11) $f(x) = (x+1)\sin x$ とする。このとき、$f'(\pi)$ を計算せよ。

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= (x+1)'\sin x + (x+1)(\sin x)' = \sin x + (x+1)\cos x \\ f'(\pi) &= \sin\pi + (\pi+1)\cos\pi = 0 + (\pi+1) \times 1 \\ &= \pi + 1\end{aligned}$$

(12) $f(x) = e^{2jx}$ とする。このとき、$f'(\pi)$ を計算せよ。

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^{2jx}(2jx)' = 2je^{2jx} \\ f'(\pi) &= 2je^{2j\pi} = 2j\end{aligned}$$

学籍番号:____________ 氏 名:____________________

[1] 次の式を x について微分せよ。

(1) $y = (3x+1)^4$

(2) $y = \sin 2x$

(3) $y = (e^x+2)^3$

(4) $y = \dfrac{x(x+1)}{x+2}$

(5) $y = \dfrac{1}{1+e^x}$

(6) $y = \log(x^2+x)$

(7) $y = \log \dfrac{x+1}{x+2}$

(8) $y = \log(1+e^x)$

(9) $y = \log(\sin x)$

(10) $y = x \int (x+2)dx$

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿　氏　名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[1] 次の式を x について微分せよ。

(1) $y=(3x+1)^4$

$$y' = 4(3x+1)^3\times(3x+1)' = 12(3x+1)^3$$

[別解] $t=3x+1$ と置くと、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}\\ &= (t^4)'(3x+1)' = 3t^3\times 3\\ &= 12t^3 = 12(3x+1)^3\end{aligned}$$

(2) $y=\sin 2x$

$$y' = (\cos 2x)\times(2x)' = 2\cos 2x$$

(3) $y=(e^x+2)^3$

$$y' = 3(e^x+2)^3(e^x+2)' = e^x(e^x+2)^3$$

(4) $y=\dfrac{x(x+1)}{x+2}$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{\{x(x+1)\}'(x+2)-x(x+1)(x+2)'}{(x+2)^2}\\ &= \frac{\{x'(x+1)+x(x+1)'\}(x+2)-x(x+1)(x+2)'}{(x+2)^2}\\ &= \frac{\{x+1+x\}(x+2)-x(x+1)}{(x+2)^2}\\ &= \frac{(2x+1)(x+2)-x(x+1)}{(x+2)^2}\\ &= \frac{x^2+4x+2}{(x+2)^2}\end{aligned}$$

(5) $y=\dfrac{1}{1+e^x}$

$$y' = -\frac{(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

[別解] $t=1+e^x$ と置き換える。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}\\ &= \left(\frac{d}{dt}\frac{1}{t}\right)\times\left(\frac{d}{dx}(1+e^x)\right)\\ &= \left(t^{-1}\right)'\times(1+e^x)'\\ &= -t^{-2}e^x = -\frac{e^t}{(1+e^x)^2}\end{aligned}$$

(6) $y=\log(x^2+x)$

$$y' = \frac{(x^2+x)'}{x^2+x} = \frac{2x+1}{x^2+x}$$

[別解] $t=x^2+x$ と置き換えると、$y=\log t$ と表されるので、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}\\ &= \left\{\frac{d}{dt}\log t\right\}\times\left\{\frac{d}{dx}(x^2+x)\right\}\\ &= \frac{1}{t}\times(2x+1) = \frac{2x+1}{x^2+x}\end{aligned}$$

(7) $y=\log\dfrac{x+1}{x+2}$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)'}{\frac{x+1}{x+2}}\\ &= \frac{\frac{(x+1)'(x+2)-(x+1)(x+2)'}{(x+2)^2}}{\frac{x+1}{x+2}}\\ &= \cdots\end{aligned}$$

[別解]

$$\begin{aligned}y &= \log(x+1)-\log(x+2)\\ y' &= \{\log(x+1)\}'-\{\log(x+2)\}'\\ &= \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\\ &= \frac{1}{(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

(8) $y=\log(1+e^x)$

$$y' = \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

(9) $y=\log(\sin x)$

$$y' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

(10) $y=x\displaystyle\int(x+2)dx$

$$\begin{aligned}y' &= x'\times\int(x+2)dx + x\times\left\{\int(x+2)dx\right\}'\\ &= \int(x+2)dx + x(x+2)\\ &= \frac{1}{2}x^2+2x+C+x(x+2)\\ &= \frac{3}{2}x^2+4x+C\end{aligned}$$

学籍番号:__________ 氏　名:__________

[1] 次の式を x について微分せよ。

(1) $y = \log \dfrac{(x+1)^2}{x(2x+1)}$

(2) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$

(3) $y = \dfrac{1+\log x}{2+\log x}$

(4) $y = \cos(x^2+1)$

(5) $y = \log(x^2+1)$

[2] 次の不定積分を計算せよ。

(6) $y = \displaystyle\int x(2x+1)dx$

(7) $y = \displaystyle\int \sin(2x+1)dx$

(8) $y = \displaystyle\int \frac{dx}{x+2}$

(9) $y = \displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

(10) $y = \displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x}dx$

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿　氏　名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[1] 次の式を x について微分せよ。

(1) $y = \log \dfrac{(x+1)^2}{x(2x+1)}$

$$\begin{aligned} y &= 2\log(x+1) - \log x - \log(2x+1) \\ y' &= \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x} - \frac{2}{2x+1} \\ &= -\frac{3x+1}{x(x+1)(2x+1)} \end{aligned}$$

(2) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$

$t = x^2$ と置き換えて、

$$\begin{aligned} y &= \frac{t+1}{t+2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \\ &= \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{t+1}{t+2}\right) \right\} \times \left(\frac{d}{dx} x^2 \right) \\ &= \frac{(t+1)'(t+2) - (t+1)(t+2)'}{(t+2)^2} \times 2x \\ &= \frac{2x}{(t+2)^2} = \frac{2x}{(x^2+2)^2} \end{aligned}$$

[別解]

$$\begin{aligned} y &= \frac{t+1}{t+2} = \frac{(t+2)-1}{t+2} \\ &= 1 - \frac{1}{t+2} \\ \frac{dy}{dx} &= \left\{ 1 - \frac{1}{t+2} \right\}' \times (x^2)' \\ &= \frac{2x}{(t+2)^2} = \frac{2x}{(x^2+2)^2} \end{aligned}$$

(3) $y = \dfrac{1+\log x}{2+\log x}$

$t = \log x$ と置き換えて、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{1+t}{2+t}\right)' \times \frac{d}{dx}\log x \\ &= \frac{(1+t)'(2+t) - (1+t)(2+t)'}{(2+t)^2} \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x(2+t)^2} = \frac{1}{x(2+\log x)^2} \end{aligned}$$

(4) $y = \cos(x^2+1)$

$t = x^2+1$ と置き換えて、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \{\cos t\}' \times (x^2+1)' \\ &= -2x\sin t = -2x\sin(x^2+1) \end{aligned}$$

(5) $y = \log(x^2+1)$

$t = x^2+1$ と置き換えて、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \{\log t\}' \times (x^2+1)' \\ &= \frac{2x}{t} = \frac{2x}{x^2+1} \end{aligned}$$

[2] 次の不定積分を計算せよ。

(6) $y = \displaystyle\int x(2x+1)dx$

$$\begin{aligned} y &= \int (2x^2+x)dx = 2\int x^2 dx + \int x dx \\ &= 2 \times \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C \end{aligned}$$

(7) $y = \displaystyle\int \sin(2x+1)dx$

$$\{\cos(2x+1)\}' = -2\sin(2x+1)$$

$$-\frac{1}{2}\{\cos(2x+1)\}' = \sin(2x+1)$$

であるから、逆に、

$$y = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C$$

(8) $y = \displaystyle\int \frac{dx}{x+2}$

$$\{\log(x+2)\}' = \frac{1}{x+2}$$

であるから、

$$y = \log(x+2) + C$$

(9) $y = \displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

(5) の結果より、

$$\left\{\log(x^2+1)\right\}' = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \log(x^2+1) + C$$

(10) $y = \displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x}dx$

$$\begin{aligned} y &= \int \left(2x + \frac{1}{x}\right)dx \\ &= 2\int x dx + \int \frac{1}{x}dx \\ &= x^2 + \log x + C \end{aligned}$$

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏　名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[1] 次の式を x について微分せよ。

(1) $y = xe^{-x}$

(2) $y = e^x \sin 2x$

(3) $y = x(1 - \log x)$

(4) $y = \sqrt{1 + 2\sin x}$

(5) $y = \dfrac{2 + e^x}{1 + e^x}$

[2] 次の不定積分を計算せよ。

(6) $y = \displaystyle\int \frac{1}{2x+1} dx$

(7) $y = \displaystyle\int x \sin(x^2 + 1) dx$

(8) $y = \displaystyle\int \frac{2x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(9) $y = \displaystyle\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx$

(10) $y = \displaystyle\int e^x \sqrt{1 + e^x} dx$

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿　氏　名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[1] 次の式を x について微分せよ。

(1) $y = xe^{-x}$

$$\begin{aligned} y' &= x'e^{-x} + x(e^{-x})' \\ &= e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x} \end{aligned}$$

(2) $y = e^x \sin 2x$

$$\begin{aligned} y' &= (e^x)' \sin 2x + e^x (\sin 2x)' \\ &= e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x = e^x(\sin 2x + 2\cos 2x) \end{aligned}$$

(3) $y = x(1 - \log x)$

$$\begin{aligned} y' &= x'(1-\log x) + x(1-\log x)' \\ &= 1 - \log x + x(-\frac{1}{x}) \\ &= -\log x \end{aligned}$$

(4) $y = \sqrt{1 + 2\sin x}$

$t = 1 + 2\sin x$ と置き換えると、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \left\{ \frac{d}{dt}\sqrt{t} \right\} \cdot \frac{d}{dx}(1 + 2\sin x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{t}} \times 2\cos x \\ &= \frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}} \end{aligned}$$

(5) $y = \dfrac{2+e^x}{1+e^x}$

$t = e^x$ と置き換えると、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{2+t}{1+t}\right)' \times (e^x)' \\ &= \left(1 + \frac{1}{1+t}\right)' e^x \\ &= -\frac{e^x}{(1+t)^2} = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} \end{aligned}$$

[2] 次の不定積分を計算せよ。

(6) $y = \displaystyle\int \frac{1}{2x+1} dx$

$t = 2x + 1$ と置くと、

$$dt = (2x+1)' dx = 2dx, \qquad dx = \frac{1}{2} dt$$

であるから、

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{1}{t} \times \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2} \log t + C = \frac{1}{2} \log(2x+1) + C \end{aligned}$$

ただし、C は積分定数 (任意の定数) である。

(7) $y = \displaystyle\int x \sin(x^2+1) dx$

$t = x^2 + 1$ と置くと、

$$dt = (x^2+1)' dx = 2xdx, \qquad xdx = \frac{1}{2} dt$$

であるから、

$$\begin{aligned} y &= \int \sin t \frac{dt}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \cos t + C = -\frac{1}{2} \cos(x^2+1) + C \end{aligned}$$

(8) $y = \displaystyle\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

$t = x^2 + 1$ と置くと、

$$dt = 2xdx$$

したがって、

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-1/2} dt \\ &= 2t^{1/2} + C = 2\sqrt{x^2+1} + C \end{aligned}$$

(9) $y = \displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

$t = 1 + e^x$ と置くと、$dt = e^x dx$ であるから、

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{dt}{t} = \log t + C \\ &= \log(1+e^x) + C \end{aligned}$$

(10) $y = \displaystyle\int e^x \sqrt{1+e^x} dx$

$t = 1 + e^x$ と置くと、$dt = e^x dx$ であるから、

$$\begin{aligned} y &= \int \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2} + C \end{aligned}$$

学籍番号:__________ 氏　名:__________

[1] 次の式を x について微分せよ。

(1) $y = \dfrac{\log x}{x}$

(2) $y = \sin^5 x$

(3) $y = \tan 2x$

(4) $y = \log \dfrac{x+1}{x+2}$

(5) $y = \sin^{-1} 2x$

[2] 次の不定積分を計算せよ。

(6) $y = \displaystyle\int \sqrt[3]{x+2}\,dx$

(7) $y = \displaystyle\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-x}+1}}dx$

(8) $y = \displaystyle\int e^{\cos x} \sin x\,dx$

(9) $y = \displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

(10) $y = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x}$

学籍番号:________ 氏　名:________________

[1] 次の式を x について微分せよ。

(1) $y = \dfrac{\log x}{x}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\log x)'x - x'\log x}{x^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x}\times x - \log x}{x^2} \\ &= \frac{1-\log x}{x^2} \end{aligned}$$

公式:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

(2) $y = \sin^5 x$

$t = \sin x$ と置くと、$y = t^5$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx} \\ &= \left\{\frac{d}{dt}t^5\right\}\times\left\{\frac{d}{dx}\sin x\right\} \\ &= 5t^4\cos x = 5\sin^4 x\cos x \end{aligned}$$

(3) $y = \tan 2x$

$t = 2x$ と置くと、$y = \tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx} \\ &= \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)\right\}\times\left\{\frac{d}{dx}2x\right\} \\ &= \frac{(\sin t)'\cos t - \sin t(\cos t)'}{\cos^2 t}\times 2 \\ &= \frac{2(\cos^2 t + \sin^2 t)}{\cos^2 t} \\ &= \frac{2}{\cos^2 t} = \frac{2}{\cos^2 2x} \end{aligned}$$

(4) $y = \log\dfrac{x+1}{x+2}$

$$\begin{aligned} y &= \log(x+1) - \log(x+2) \\ y' &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{(x+1)(x+2)} \end{aligned}$$

(5) $y = \sin^{-1} 2x$

$2x = \sin y$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\left\{\frac{1}{2}\sin y\right\}'} \\ &= \frac{2}{\cos y} \\ &= \pm\frac{2}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \\ &= \pm\frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} \end{aligned}$$

[2] 次の不定積分を計算せよ。

(6) $y = \displaystyle\int \sqrt[3]{x+2}\,dx$

$$\begin{aligned} y &= \int (x+2)^{\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1}(x+2)^{\frac{1}{3}+1} + C \\ &= \frac{3}{4}(x+2)^{\frac{4}{3}} + C \end{aligned}$$

(7) $y = \displaystyle\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-x}+1}}dx$

$t = e^{-x}+1$ と置くと、

$$\frac{dt}{dx} = (e^{-x}+1)' = -e^{-x}, \quad e^{-x}dx = -dt$$

であるから、

$$\begin{aligned} y &= -\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt = -\int t^{-\frac{1}{2}}dt \\ &= -2t^{\frac{1}{2}} + C = -2\sqrt{t} + C \\ &= -2\sqrt{e^{-x}+1} + C \end{aligned}$$

(8) $y = \displaystyle\int e^{\cos x}\sin x dx$

$t = \cos x$ と置くと、$dt = (\cos x)'dx = -\sin x dx$ であるから、

$$\begin{aligned} y &= -\int e^t dt = -e^t + C \\ &= -e^{\cos x} + C \end{aligned}$$

(9) $y = \displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

$$\begin{aligned} y &= \int\left\{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right\}dx \\ &= \log(x+1) - \log(x+2) + C = \log\frac{x+1}{x+2} + C \end{aligned}$$

(10) $y = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x}$

$$\begin{aligned} y &= \int\frac{1}{x(x+1)}dx = \int\left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right\}dx \\ &= \log x - \log(x+1) + C = \log\frac{x}{x+1} + C \end{aligned}$$

[部分分数展開]

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$$

と変形する場合の定数 A, B を求める。

上式の両辺に $x+1$ をかけ算し、$x = -1$ と置くと、

$$\left.\frac{x+2}{x-3}\right|_{x=-1} = A + \left.\frac{x+1}{x-3}B\right|_{x=-1}$$

$$\frac{1}{-4} = A \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{4}$$

同様に、$x-3$ をかけ算し $x = 3$ と置くと、

$$\frac{3+2}{3+1} = B \quad \rightarrow \quad B = \frac{5}{4}$$

学籍番号:____________ 氏　名:____________________

[1] 次の式を x について微分せよ。

(1) $y = e^{-x}\cos(x+1)$

(2) $y = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$

(3) $y = \log\dfrac{x^2+1}{x^2}$

(4) $y = (x-1)\sqrt{x+3}$

(5) $y = \sqrt{1+\cos x}$

[2] 次の不定積分を計算せよ。

(6) $y = \displaystyle\int \frac{x+2}{x}dx$

(7) $y = \displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+x}dx$

(8) $y = \displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx$

(9) $y = \displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^3}dx$

(10) $y = \displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}dx$

学籍番号:____________ 氏 名:____________

[1] 次の式を x について微分せよ。

(1) $y = e^{-x}\cos(x+1)$

$$\begin{aligned} y' &= -e^{-x}\cos(x+1) - e^{-x}\sin(x+1) \\ &= -e^{-x}\{\cos(x+1)+\sin(x+1)\} \end{aligned}$$

$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

(2) $y = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sqrt{1-x})'\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}(\sqrt{1+x})'}{1+x} \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}} - \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} \\ &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\right\}\frac{1}{1+x} \\ &= -\frac{(1+x)+(1-x)}{2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}(1+x)} \\ &= -\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

(3) $y = \log\dfrac{x^2+1}{x^2}$

$$\begin{aligned} y' &= \left\{\log(x^2+1) - \log x^2\right\}' \\ &= \frac{2x}{x^2+1} - \{2\log x\}' \\ &= \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{x} \\ &= -\frac{2}{x(x^2+1)} \end{aligned}$$

(4) $y = (x-1)\sqrt{x+3}$

$$\begin{aligned} y' &= (x-1)'\sqrt{x+3} + (x-1)(\sqrt{x+3})' \\ &= \sqrt{x+3} + \frac{x-1}{2\sqrt{x+3}} \\ &= \frac{2(x+3)+(x-1)}{2\sqrt{x+3}} \\ &= \frac{3x+5}{2\sqrt{x+3}} \end{aligned}$$

(5) $y = \sqrt{1+\cos x}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{1+\cos x}} \times (\cos x)' \\ &= -\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} \end{aligned}$$

[2] 次の不定積分を計算せよ。

(6) $y = \displaystyle\int \frac{x+2}{x}dx$

$$y = \int\left\{1+\frac{2}{x}\right\}dx = x + 2\log x + C$$

(7) $y = \displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+x}dx$

$$\frac{x+2}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

と展開すると、

$$A = \left.\frac{x+2}{x+1}\right|_{x=0} = 2, \qquad B = \left.\frac{x+2}{x}\right|_{x=-1} = -1$$

であるから、

$$y = 2\log x - \log(x+1) + C = \log\frac{x^2}{x+1} + C$$

(8) $y = \displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx$

$$\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

と被積分関数を展開すると、

$$A = \frac{-1+3}{-1+2} = 2, \qquad B = \frac{-2+3}{-2+1} = -1$$

であるから、

$$\begin{aligned} y &= \int\left\{\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right\}dx \\ &= 2\log(x+1) - \log(x+2) + C \\ &= \log\frac{(x+1)^2}{x+2} + C \end{aligned}$$

(9) $y = \displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^3}dx = \int \underbrace{(x^2+1)^{-3}}_{\{g(x)\}^{-3}} \times \underbrace{x}_{\frac{1}{2}g'(x)}\,dx$

$t = x^2+1$ と置き換えると、

$$\frac{dt}{dx} = (x^2+1)' = 2x, \quad xdx = \frac{1}{2}dt$$

であるから、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\int\frac{1}{t^3}dt = -\frac{1}{4}t^{-2} + C \\ &= -\frac{1}{4(x^2+1)^2} + C \end{aligned}$$

(10) $y = \displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}dx = \int \underbrace{(1+\cos x)^{-\frac{1}{2}}}_{f(g(x))} \times \underbrace{\sin x}_{-g'(x)}\,dx$

$t = \cos x$ と置くと、$dt = (\cos x)'dx = -\sin x dx$ であるから、

$$\begin{aligned} y &= -\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -2t^{\frac{1}{2}} + C \\ &= -2\sqrt{1+\cos x} + C \end{aligned}$$

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[1] 次の積分を計算せよ。

(1) $I = \int (x + \frac{1}{x})^2 dx$

(2) $I = \int x \sin(x^2) dx$

(3) $I = \int \frac{1}{x} \log x dx$

(4) $I = \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx$

[2] 部分積分により次の積分を計算せよ。

(5) $I = \int x \sin x dx$

(6) $I = \int (x + 1) e^x dx$

(7) $I = \int \log(2x) dx$

(8) $I = \int \sin x e^x dx$

学籍番号:__________ 氏 名:__________

[1] 次の積分を計算せよ。

(1) $I=\int(x+\frac{1}{x})^2dx$

$$I = \int(x^2+2+\frac{1}{x^2})dx=\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{x}+C$$

(2) $I=\int x\sin(x^2)dx$

$t=x^2$ と置くと、$dt=2xdx,\ xdx=\frac{1}{2}dt$ であるから、

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{\sin x^2}_{\sin g(x)} \times \underbrace{x}_{\frac{1}{2}g'(x)} dx \\ &= \frac{1}{2}\int \sin t dt = -\frac{1}{2}\cos t + C \\ &= -\frac{1}{2}\cos(x^2)+C \end{aligned}$$

(3) $I=\int \frac{1}{x}\log x dx$

$t=\log x$ と置くと、$dt=\frac{1}{x}dx$ であるから、

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{\log x}_{t} \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{t'} dx \\ &= \int t dt = \frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(\log x)^2+C \end{aligned}$$

(4) $I=\int \frac{x}{x^2-3x+2}dx$

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

と展開すると、

$$A=\left.\frac{x}{x-2}\right|_{x=1}=-1, \qquad B=\left.\frac{x}{x-1}\right|_{x=2}=2$$

であるから、

$$\begin{aligned} I &= \int\left\{\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right\}dx \\ &= -\log(x-1)+2\log(x-2)+C \\ &= \log\frac{(x-2)^2}{x-1}+C \end{aligned}$$

[2] 部分積分により次の積分を計算せよ。

(5) $I==\int \underbrace{x}_{f}\times\underbrace{\sin x}_{g'}dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{x}_{f}\times\underbrace{(-\cos x)'}_{g'}dx \\ &= \underbrace{x}_{f}\times\underbrace{(-\cos x)}_{g} - \int \underbrace{x'}_{f'}\times\underbrace{(-\cos x)}_{g}dx \\ &= -x\cos x+\int\cos x dx \\ &= -x\cos x+\sin x+C \end{aligned}$$

(6) $I=\int(x+1)e^x dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{(x+1)}_{f}\times\underbrace{(e^x)'}_{g'}dx \\ &= \underbrace{(x+1)}_{f}\times\underbrace{e^x}_{g} - \int\underbrace{(x+1)'}_{f'}\times\underbrace{e^x}_{g}dx \\ &= (x+1)e^x-\int e^x dx \\ &= (x+1)e^x-e^x+C=xe^x+C \end{aligned}$$

(7) $I=\int\log(2x)dx$

$$\begin{aligned} I &= \int\underbrace{1}_{f'}\times\underbrace{\log(2x)}_{g}dx \\ &= x\log(2x)-\int\underbrace{x}_{f}\times\underbrace{\{\log(2x)\}'}_{g'}dx \\ &= x\log(2x)-\int dx = x\log(2x)-x+C \end{aligned}$$

(8) $I=\int e^x\sin x dx$

$$\begin{aligned} I &= \int\underbrace{(e^x)'}_{{f_1}'}\times\underbrace{\sin x}_{g_1}dx \\ &= e^x\sin x-\int\underbrace{e^x}_{f_1}\times\underbrace{(\sin x)'}_{{g_1}'}dx \\ &= e^x\sin x-\int e^x\cos x dx \end{aligned}$$

ここで、再び、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned} &\int\underbrace{(e^x)}_{{f_2}'}\times\underbrace{\cos x}_{g_2}dx \\ &= e^x\cos x-\int\underbrace{e^x}_{f_2}\times\underbrace{(\cos x)}_{{g_2}'}dx \\ &= e^x\cos x+\int e^x\sin x dx = e^x\cos x+I \end{aligned}$$

と変形できるので、

$$\begin{aligned} I &= e^x\sin x-e^x\cos x-I \\ I &= \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C \end{aligned}$$

学籍番号:________________ 氏　名:________________________________

[1] 次の関数を x について微分せよ。

(1) $y = \log(x^2 + 4x + 5)$

(2) $y = (2x+1)^2 e^{-x}$

(3) $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

(4) $y = (1 + 2\sin x)^3$

(5) $y = e^{2\cos 3x}$

[2] 次の積分を計算せよ。

(6) $I = \displaystyle\int (x+1)\sin(x^2 + 2x + 2)dx$

(7) $I = \displaystyle\int x\cos 2x dx$

(8) $I = \displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+x} dx$

(9) $I = \displaystyle\int e^{-x}\cos x dx$

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏　名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[1] 次の関数を x について微分せよ。

(1) $y=\log(x^2+4x+5)$

$t=x^2+4x+5$ と置くと、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}\\ &= \left\{\frac{d}{dt}\sqrt{t}\right\}\times\left\{\frac{d}{dx}(x^2+4x+5)\right\}\\ &= \left(t^{-1/2}\right)'\times(x^2+4x+5)'\\ &= \frac{1}{2\sqrt{t}}\times(2x+4)=\frac{x+2}{\sqrt{t}}=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}\end{aligned}$$

(2) $y=(2x+1)^2e^{-x}$

$$\begin{aligned}y' &= \left\{(2x+1)^2\right\}'e^{-x}+(2x+1)^2\left\{e^{-x}\right\}'\\ &= 4(2x+1)e^{-x}-(2x+1)^2e^{-x}\\ &= -(4x^2-4x-3)e^{-x}\end{aligned}$$

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

$t=x^2$ と置き換えて、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left\{\frac{d}{dt}\frac{1-t}{1+t}\right\}\times\frac{dt}{dx}=\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{1+t}-1\right)\right\}\times 2x\\ &= -\frac{2}{(1+t)^2}\times 2x=-\frac{4x}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

(4) $y=(1+2\sin x)^3$

$t=1+2\sin x$ と置くと、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left\{\frac{d}{dt}t^3\right\}\times\left\{\frac{d}{dx}(1+2\sin x)\right\}\\ &= 3t^2\times 2\cos x=6\cos x(1+2\sin x)^2\end{aligned}$$

(5) $y=e^{2\cos 3x}$

$t=2\cos 3x$ と置くと、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left\{\frac{d}{dt}e^t\right\}\times\left\{\frac{d}{dx}2\cos 3x\right\}\\ &= e^t\times\{2\times(-3\sin 3x)\}\\ &= -6\sin 3xe^{2\cos 3x}\end{aligned}$$

[2] 次の積分を計算せよ。

(6) $I=\displaystyle\int\underbrace{(x+1)}_{\frac{1}{2}g'}\sin(\underbrace{x^2+2x+2}_{g})dx$

$t=x^2+2x+2$ と置くと、

$$\frac{dt}{dx}=2x+2 \quad\Rightarrow\quad (x+1)dx=\frac{1}{2}dt$$

であるから、

$$I = \frac{1}{2}\int\sin t dt=-\frac{1}{2}\cos t+C=-\frac{1}{2}\cos(x^2+2x+2)+C$$

(7) $I=\displaystyle\int x\cos 2xdx$　　(部分積分)

$$\begin{aligned}I &= \int\underbrace{x}_{f}\times\underbrace{\cos 2x}_{g'}dx=\int\underbrace{x}_{f}\times\underbrace{(\frac{1}{2}\sin 2x)'}_{g'}dx\\ &= \underbrace{x}_{f}\times\underbrace{\frac{1}{2}\sin 2x}_{g}-\int\underbrace{x'}_{f'}\times\underbrace{\frac{1}{2}\sin 2x}_{g}dx\\ &= \frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2xdx\\ &= \frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C\end{aligned}$$

(8) $I=\displaystyle\int\frac{x-2}{x^2+x}dx$　　(部分分数展開)

$$\frac{x-2}{x^2+x}=\frac{x-2}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}$$

$$A=\left.\frac{x-2}{x+2}\right|_{x=0}=-1,\qquad B=\left.\frac{x-2}{x}\right|_{x=-2}=2$$

であるから、

$$\begin{aligned}I &= -\int\frac{dx}{x}+2\frac{dx}{x+2}=-\log x+2\log(x+2)+C\\ &= \log\left\{\frac{(x+2)^2}{x}\right\}+C\end{aligned}$$

(9) $I=\displaystyle\int e^{-x}\cos xdx$　　(部分積分)

$$\begin{aligned}I &= \int\underbrace{(-e^{-x})'}_{f'}\times\underbrace{\cos x}_{g}dx\\ &= \underbrace{-e^{-x}}_{f}\times\underbrace{\cos x}_{g}-\int\underbrace{(-e^{-x})}_{g}\times\underbrace{(\cos x)'}_{g'}dx\\ &= -e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin xdx\end{aligned}$$

もう一度部分積分して、

$$\begin{aligned}I &= -e^{-x}\cos x+\int\underbrace{(e^{-x})'}_{f'}\times\underbrace{\sin x}_{g}dx\\ &= -e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x-\int\underbrace{e^{-x}}_{f}\times\underbrace{\cos x}_{g'}dx\\ &= e^{-x}(\sin x-\cos x)-I\\ I &= \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C\end{aligned}$$

[別解]　(オイラーの式: $e^{\pm jx}=\cos x\pm j\sin x$)

$$\begin{aligned}I &= \mathrm{Re}\int e^{-x}e^{jx}dx=\mathrm{Re}\int e^{(-1+j)x}dx\\ &= \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{(-1+j)x}}{-1+j}\right\}+C=\mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{2}(1+j)e^{(-1+j)x}\right\}+C\\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{(1+j)e^{jx}\right\}e^{-x}+C=-\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)e^{-x}+C\end{aligned}$$

学籍番号:____________ 氏 名:____________________

[1] 次の積分を計算せよ。

(1) $I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

(2) $I = \int xe^{-x} dx$

(3) $I = \int x \log(x^2+1)$

(4) $I = \int e^{-x} \sin x dx$

[2] 次の微分方程式を解け (一般解を求めよ)。

(1) $\frac{dy}{dx} + x(y+1) = 0$

(2) $\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x}{y} = 0$

(3) $\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$

(4) $\frac{dy}{dx} = e^{-x}\sqrt{y}$

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿　氏　名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[1] 次の積分を計算せよ。

(1) $I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

$t = x^2+1$ と置くと、$dt = 2xdx$ であるから、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{t} + C \\ &= \sqrt{x^2+1} + C \end{aligned}$$

(2) $I = \int xe^{-x} dx$

部分積分により、

$$\begin{aligned} I &= -\int \underbrace{x}_{f} \times \underbrace{e^{-x}}_{g'} dx \\ &= -xe^{-x} + \int \underbrace{1}_{f'} \times \underbrace{e^{-x}}_{g} dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C \end{aligned}$$

(3) $I = \int x \log(x^2+1)$

$t = x^2+1$ と置き換えると、$dt = 2xdx$ であるから、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \log t dt = \frac{1}{2}\int \underbrace{t'}_{f'} \times \underbrace{\log t}_{g} dt \\ &= \frac{1}{2}\{t\log t - \int \underbrace{t}_{f} \times \underbrace{\frac{1}{t}}_{g'} dt\} \\ &= \frac{1}{2}\{t\log t - t\} + C \\ &= -\frac{1}{2}(x^2+1)\left\{1 - \log(x^2+1)\right\} + C \end{aligned}$$

(4) $I = \int e^{-x} \sin x dx$

$$\begin{aligned} I &= \mathrm{Im}\int e^{-x}(\cos x + j\sin x)\, dx \\ &= \mathrm{Im}\int e^{(-1+j)x} dx \\ &= \mathrm{Im}\left[\frac{e^{(-1+j)x}}{-1+j}\right] + C \\ &= \mathrm{Im}\left[\frac{-1-j}{2e^{-x}e^{jx}}\right] + C \\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[(1+j)(\cos x + j\sin x)\right] e^{-x} + C \\ &= -\frac{1}{2}(\cos x + \sin x)e^{-x} + C \end{aligned}$$

[2] 次の微分方程式を解け (一般解を求めよ)。

(1) $\frac{dy}{dx} + x(y+1) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -x(y+1) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y+1} = -xdx$$

両辺を積分して、

$$\log(y+1) = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

これを y について解くと、

$$\begin{aligned} y+1 &= e^{-\frac{1}{2}x^2+C} \\ y &= Ae^{-\frac{1}{2}x^2} - 1 \end{aligned}$$

ここで、$A = e^C$ は任意の定数である。

(2) $\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x}{y} = 0$

$$ydy = -\cos x dx$$

両辺を積分して、

$$\frac{1}{2}y^2 = -\sin x + C$$

$$\begin{aligned} y^2 &= 2(C - \sin x) \\ y &= \pm\sqrt{2(C - \sin x)} \end{aligned}$$

(3) $\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$

$$\frac{dy}{y^2} = -2xdx$$

両辺を積分して、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{y} &= -x^2 + C \\ y &= \frac{1}{x^2 - C} \end{aligned}$$

(4) $\frac{dy}{dx} = e^{-x}\sqrt{y}$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = e^{-x}dx$$

両辺を積分して、

$$\begin{aligned} \int y^{-1/2}dy &= \int e^{-x}dx \\ 2\sqrt{y} &= -e^{x} + C \\ y &= \left(\frac{C - e^{x}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

学籍番号:_________________ 氏 名:______________________________

[1] 次の積分を計算せよ。

(1) $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$

(2) $I = \displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$

(3) $I = \displaystyle\int (x+1) \log x dx$

[2] 次の微分方程式を解け (一般解を求めよ)。

(1) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{(x+1)y^2}{x} = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$

(5) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x$

(6) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{x^2+1}$

学籍番号:________________ 氏　名:________________________________

[お知らせ] 12 月 9 日 (火曜日)： 第 2 回中間試験 (微分・積分、微分方程式)

[1] 次の積分を計算せよ。

(1) $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$

$$\begin{aligned} I &= \int (x+1)^{-\frac{1}{2}}dx \\ &= \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(x+1)^{-\frac{1}{2}+1} + C \\ &= 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C \\ &= 2\sqrt{x+1} + C \end{aligned}$$

(2) $I = \displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

$t = x^2 + x + 1$ と置くと、
$dt = (x^2+x+1)'dx = (2x+1)dx$ であるから、

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\underbrace{x^2+x+1}_{t}} \times \underbrace{(2x+x)dx}_{dt} \\ &= \int \frac{1}{t}dt \\ &= \log t + C \\ &= \log(x^2+x+1) + C \end{aligned}$$

(3) $I = \displaystyle\int (x+1)\log x dx$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \underbrace{\{(x+1)^2\}'}_{f'} \times \underbrace{\log x}_{g} dx \\ &= \frac{1}{2}(x+1)^2\log x - \frac{1}{2}\int \underbrace{(x+1)^2}_{f} \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} dx \\ &= \frac{1}{2}(x+1)^2\log x - \frac{1}{2}\int (x+2+\frac{1}{x})dx \\ &= \frac{1}{2}(x+1)^2\log x - \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}x^2 + 2x + \log x\} + C \\ &= \frac{1}{4}\{2(x+2)x\log x - (x+4)x\} + C \end{aligned}$$

[別解] $t = \log x, \quad x = e^t$ と置換すると、$dx = e^t dt$ であるから、

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{(x+1)}_{e^t+1} \times \underbrace{\log x}_{t} \underbrace{dx}_{e^t dt} \\ &= \int (e^t+1) \times t \times e^t dt = \int t(e^{2t} + e^t)dt \\ &= t(\frac{1}{2}e^{2t} + e^t) - \int (\frac{1}{2}e^{2t} + e^t)dt \\ &= t(\frac{1}{2}e^{2t} + e^t) - (\frac{1}{4}e^{2t} + e^t) + C \\ &= \frac{1}{2}(x^2+2x)\log x - \frac{1}{4}(x^2+4x) + C \end{aligned}$$

[2] 次の微分方程式を解け (一般解を求めよ)。

(1) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{(x+1)y^2}{x} = 0$

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{x+1}{x} \quad \text{(変数分離型)}$$

と変形し、両辺を x で積分すると、左辺は y のみ、右辺は x のみの積分となるので、積分が実行可能である。このことから次のように変形できる。

$$\int \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}dx = -\int \frac{x+1}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}dy = -\int (1+\frac{1}{x})dx$$

$$-\frac{1}{y} = -(x + \log x) + C$$

$$y = \frac{1}{x + \log x - C}$$

ここで、C は任意の定数である。

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$ (定係数同次 2 階線形微分方程式)

解を $y = e^{mx}$ と仮定して上の方程式に代入し、定数 m を決定する。

$$(e^{mx})' = me^{mx}, \qquad (e^{mx})'' = m^2e^{mx}$$

であるから、次の m についての方程式（特性方程式）が得られる。

$$m^2 + 5m + 6 = 0$$

これを解いて、

$$(m+2)(m+3) = 0 \ \Rightarrow \ m = -2, -3$$

したがって、上の微分方程式の一般解は

$$y = Ae^{-2x} + Be^{-3x}$$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$

$$m^2 + 6m + 9 = 0 \quad \text{(特性方程式)}$$

$$(m+3)^2 = 0 \ \Rightarrow \ m = -3$$

重解を持つので、微分方程式の解は

$$y = (Ax + B)e^{-3x}$$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$

$$m^2 + 4m + 5 = 0 \quad \text{(特性方程式)}$$

$$(m+2)^2 + 1 = 0 \ \Rightarrow \ m = -2 \pm j$$

したがって、

$$\begin{aligned} y &= Ae^{(-2+j)x} + Be^{(-2-j)x} = (Ae^{jx} + Be^{-jx})e^{-2x} \\ &= (C\cos x + D\sin x)e^{-2x} \end{aligned}$$

(5) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x$ (非同次 1 階線形微分方程式)

補助方程式 $\dfrac{dy_c}{dx} + 2xy_c = 0$ を解く：

$$\frac{dy_c}{dx} = -2xy_c \ \Rightarrow\ \frac{dy_c}{y_c} = -2xdx$$

両辺を積分して、

$$\int \frac{dy_c}{y_c} = -2\int xdx \ \Rightarrow\ \log y_c = -x^2 + C$$

$$y_c = e^{-x^2+C} = e^{-x^2}e^C = Ae^{-x^2}$$

ここで、A を未知関数 $u(x)$ で置き換えて、解を

$$y(x) = u(x)e^{-x^2}$$

と置き、もとの方程式に代入して $u(x)$ を決定する。

$$\left\{u'(x)e^{-x^2} - u(x)\times(2xe^{-x^2})\right\} + 2x\times u(x)e^{-x^2} = x$$

$$u'(x)e^{-x^2} = x$$

$$\begin{aligned}
u &= \int xe^{x^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\int e^t dt, \quad (\text{ただし}, t = x^2) \\
&= \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C \\
y &= ue^{-x^2} = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}
\end{aligned}$$

[別解] 公式の利用

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

において、$P(x) = 2x,\ Q(x) = x$ と置けば、

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\int P(x)dx}\times\left\{Q(x)\int e^{\int P(x)dx}dx + C\right\} \\
&= e^{-\int 2xdx}\times\left\{\int xe^{+\int 2xdx}dx + C\right\} \\
&= e^{-x^2}\left\{\int xe^{x^2}dx + C\right\}
\end{aligned}$$

ここで、$t = x^2$ と置くと、

$$\begin{aligned}
\int xe^{x^2}dx &= \frac{1}{2}\int e^t dt, \quad (t = x^2) \\
&= \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{x^2}
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
y &= e^{-x^2}\left\{\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right\} \\
&= \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}
\end{aligned}$$

(6) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{x^2+1}$

補助方程式 $\dfrac{dy_c}{dx} + \dfrac{1}{x}y_c = 0$ を解くと、

$$\int \frac{dy_c}{y_c} + \int \frac{dx}{x} = 0 \ \Rightarrow \log y_c + \log x = C$$

$$y_c \times x = e^C \ \Rightarrow\ y_c = \frac{e^C}{x} = \frac{A}{x}.$$

解を $y(x) = \frac{u(x)}{x}$ と置き換えると、もとの方程式より、

$$\begin{aligned}
\frac{u'(x)}{x} &= \frac{2}{x^2+1} \\
u(x) &= \int \frac{2x}{x^2+1}dx \\
&= \int \frac{dt}{t}dt, \quad (t = x^2+1) \\
&= \log(x^2+1) + C \\
y &= \frac{u}{x} = \frac{\log(x^2+1) + C}{x}
\end{aligned}$$

[別解] 公式の利用 ($P(x) = \dfrac{1}{x},\ Q(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$)

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\int P(x)dx}\times\left\{Q(x)\int e^{\int P(x)dx}dx + C\right\} \\
&= e^{-\int \frac{1}{x}dx}\times\left\{\int \frac{2}{x^2+1}e^{+\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right\}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\int \frac{1}{x}dx = \log x$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2}{x^2+1}\times e^{+\int \frac{dx}{x}}dx \\
&= \int \frac{2}{x^2+1}\times e^{\log x}dx \\
&= \int \frac{2x}{x^2+1}dx \\
&= \int \frac{dt}{t}dt, \quad (t = x^2+1) \\
&= \log t = \log(x^2+1)
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\log x}\left\{\log(x^2+1) + C\right\} \\
&= \frac{1}{x}\left\{\log(x^2+1) + C\right\}
\end{aligned}$$

今後の予定

月日	授業内容
11/25(Tue)	定係数線形微分方程式 (I)
12/2(Tue)	定係数線形微分方程式 (II)
12/9(Tue)	第 2 回中間試験 (微分・積分、積分方程式)
12/17(Wed)	試験問題の解答と解説
1/13(Tue)	第 3 回中間試験、解答・解説とまとめ (2 時限分 [90min×2])

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏　名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

提出場所：　通信工学研究室ポスト (6 号館 3F)
提出期限：　11 月 21 日 (金曜日)
　注意 – 裏面にも問題があります。(積分 6 問、微分方程式 7 問)

[1] 次の積分を計算せよ。

(1) $I = \int e^x \cos 2x dx$

(2) $I = \int x \sin 3x dx$

(3) $I = \int \frac{1 + \log x}{x} dx$

(4) $I = \int \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 1} dx$

(5) $I = \int \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx$

(6) $I = \int \frac{x - 3}{x^2 + 3x} dx$

[2] 次の y についての微分方程式を解け。

(1) $\frac{dy}{dx} + e^x y^3 = 0$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + xye^{-x} = 0$

(5) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{2\sqrt{x}} = 1$

(3) $\dfrac{dy}{dx} + x\sqrt{y}e^{x^2} = 0$

(6) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{\sin x}{x^2}$

(4) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x^2} = 0$

(7) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x} = 1$

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏　名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[1] 次の積分を計算せよ。

(1) $I = \int e^x \cos 2x dx$

$$I = \mathrm{Re}\left[\int e^x e^{2jx}\right]$$

$$\begin{aligned}&\int e^{(1+2j)x} dx \\ &= (1+2j)e^{(1+2j)x} + C \\ &= \frac{1-2j}{1^2+2^2} \times (\cos 2x + j\sin 2x)e^x + C\end{aligned}$$

であるから、

$$I = \frac{1}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x)e^x + C$$

(2) $I = \int x \sin 3x dx$

部分積分により、

$$\begin{aligned}I &= \int \underbrace{x}_{f} \times \underbrace{(-\frac{1}{3}\cos 3x)'}_{g'} dx \\ &= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \underbrace{1}_{f'} \times \cos 3x dx \\ &= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C\end{aligned}$$

(3) $I = \int \frac{1+\log x}{x} dx$

$t = \log x,\ x = e^t$ と置くと、$dx = e^t dt$ であるから、

$$\begin{aligned}I &= \int frac1 + te^t \times e^t dt \\ &= \int (1+t)dt \\ &= t + \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}t(2+t) + C \\ &= \frac{1}{2}(2+\log x)\log x + C\end{aligned}$$

(4) $I = \int \frac{x+2}{x^2+4x+1} dx$

$t = x^2+4x+1$ と置くと、$dt = (x^2+4x+1)'dx = 2(x+2)dt$ であるから、

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2}\log t + C \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+4x+1) + C\end{aligned}$$

(5) $I = \int \frac{1}{x^2+2x+1} dx$

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{1}{(x+1)^2} dx \\ &= -\frac{1}{x+1} + C\end{aligned}$$

(6) $I = \int \frac{x-3}{x^2+3x} dx$

部分分数に展開する。

$$\frac{x-3}{x^2+3x} = \frac{x-3}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}$$

$$A = \left.\frac{x-3}{x+3}\right|_{x=0} = -1, \quad B = \left.\frac{x-3}{x}\right|_{x=-3} = 2$$

$$\begin{aligned}I &= \int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x}\right) dx \\ &= 2\log(x+3) - \log x + C\end{aligned}$$

[2] 次の y についての微分方程式を解け。

(1) $\frac{dy}{dx} + e^x y^3 = 0$

変数分離型:

$$\frac{dy}{dx} = -e^x y^3$$

$$y^{-3}dy = -e^x dx$$

$$-\frac{1}{2}y^{-2} = -e^x + C$$

$$\begin{aligned}y^2 &= 2(e^x - C) \\ y &= \pm\sqrt{2(e^x - C)}\end{aligned}$$

(2) $\frac{dy}{dx} + xye^{-x} = 0$

$$\frac{1}{y}dy = -xe^{-x}dx$$

両辺を積分して、

$$\begin{aligned}\log y &= -\int xe^{-x}dx \\ &= xe^{-x} - \int e^{-x}dx \\ &= (x+1)e^{-x} + C \\ y &= e^{(x+1)e^{-x}+C} \\ &= Ae^{\{(x+1)e^{-x}\}}\end{aligned}$$

(3) $\frac{dy}{dx} + x\sqrt{y}e^{x^2} = 0$

$$\frac{dy}{\sqrt{x}} = -xe^{x^2}dx$$

両辺を積分すると、

$$\int y^{-\frac{1}{2}}dy = -\int xe^{x^2}dx$$

$$\begin{aligned}2\sqrt{y} &= -\frac{1}{2}e^{x^2} + C \\ y &= \frac{(2C - e^{x^2})^2}{16}\end{aligned}$$

(4) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x^2} = 0$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2}$$

両辺を積分して、

$$\begin{aligned} \log y &= -\frac{1}{x} + C \\ y &= e^{-\frac{1}{x}+C} \\ &= Ae^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

(5) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{2\sqrt{x}} = 1$

補助方程式

$$\frac{dy_c}{dx} - \frac{y_c}{2\sqrt{x}} = 0$$

を解く。

$$\frac{dy_c}{y_c} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

両辺を積分すると、

$$\begin{aligned} \log y_c &= \sqrt{x} + C \\ y_c &= e^{\sqrt{x}+C} = Ae^{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

この結果より、元の方程式の解を

$$y(x) = u(x)e^{\sqrt{x}}$$

と置き、方程式に代入して整理する。

$$\frac{du}{dx}e^{\sqrt{x}} = 1$$

$$u = \int e^{-\sqrt{x}}dx$$

$x = t^2$ と置き換えると、$dx = 2tdt$ であるから、

$$\begin{aligned} u &= 2\int te^{-t}dt = -2te^{-t} - 2\int e^{-t}dt \\ &= -2(t+1)e^{-t} + C = -2(\sqrt{x}+1)e^{-\sqrt{x}} + C \\ y &= u \times e^{\sqrt{x}} = -2(\sqrt{x}+1) + Ce^{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(6) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{\sin x}{x^2}$

補助方程式

$$\frac{dy_c}{dx} + \frac{2y_c}{x} = 0$$

を解く。

$$\frac{dy_c}{y_c} = -\frac{2dx}{x}$$

の両辺を積分して、

$$\begin{aligned} \log y_c &= -2\log x + C \\ y_c &= e^{-2\log x + C} = e^C \times e^{-2\log x} \\ &= \frac{A}{x^2} \end{aligned}$$

したがって、解を

$$y(x) = \frac{u(x)}{x^2}$$

と置いて、元の方程式に代入して整理する。

$$\begin{aligned} \frac{u'(x)}{x^2} &= \frac{\sin x}{x^2} \\ u' &= \sin x \\ u &= \int \sin x dx = -\cos x + C \\ y &= \frac{u}{x^2} = \frac{C - \cos x}{x^2} \end{aligned}$$

(7) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x} = 1$ 補助方程式

$$\frac{dy_c}{dx} - \frac{2y_c}{x} = 0$$

より、

$$\frac{dy_c}{y_c} = \frac{2dx}{x}$$

$$\begin{aligned} \log y_c &= 2\log x + C \\ y_c &= e^{2\log x + C} = e^C e^{2\log x} \\ &= Ax^2 \end{aligned}$$

を得るので、解を $y = u(x)x^2$ と置き、元の方程式に代入して整理する。

$$\begin{aligned} u'x^2 &= 1 \\ u' &= x^{-2} \\ u &= -x^{-1} + C \\ y &= ux^2 = x(Cx-1) \end{aligned}$$

学籍番号:__________ 氏 名:__________

提出場所： 通信工学研究室ポスト (6 号館 3F)
提出期限： 2004 年 1 月 10 日 (土曜日)
注意 – 裏面にも問題があります。(積分 3 問、微分方程式 8 問)

[1] 次の積分を計算せよ。

(1) $I = \int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x} dx$

(2) $I = \int \cos 3x \cos x dx$

(3) $I = \int \frac{x+1}{x^2+5x+6} dx$

[2] 次の y についての微分方程式を解け。

(1) $\frac{dy}{dx} + x^2y^3 = 0$

(2) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = \frac{1}{x}$

(3) $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}$

(4) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2xy}{x^2+1} = 3$

(5) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x + 1$

(6) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 5y = 10x + 4$

(7) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = e^{-x}$

(8) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 10\cos x$
初期条件 $y(0) = y'(0) = 0$ を満足する上の微分方程式の解を求めよ。