電気数学 II の home page :

`http://www.ee.t-kougei.ac.jp/tuushin/lecture/math2/index.html`

電子情報工学科のホームページ

`http://www/ee.t-kougei.ac.jp/`

内にある「授業関係するページへのリンク」より辿り着くことができます。

授業予定

1 授業内容

- 微分
- 不定積分
- 微分方程式

2 微分と導関数

連続関数 $f(x)$ に関して、x が a から b まで変化したときの $f(x)$ の変化の割合

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を $f(x)$ の区間 $a \le x \le b$ での平均変化率と呼ぶ。また、$b \to a$ での極限値を $f(x)$ の $x=a$ での微分と呼ぶ：

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

a が変化すると、それに伴い上式も変化するので、微分は a の関数となる。そこで、a を x をで置き換え、b を $x+h$ と置き換えて、

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1}$$

と表す。この $f(x)$ を x について微分して得られる関数 $f'(x)$ を $f(x)$ の導関数と呼ぶ。$f'(x)$ は $\frac{df}{dx}$ と書き表すこともある。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} \end{aligned}$$

2.1 微分公式

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\{Af(x)+Bg(x)\} \\ &\qquad \frac{1}{\Delta x}\Delta[Af(x)+Bg(x)] \\ &= A\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+B\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \\ &\to Af'(x)+Bg'(x) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] \\ &\qquad \frac{1}{\Delta x}[\{f+\Delta f\}\{g+\Delta g\}-f\cdot g] \\ &= \frac{1}{\Delta x}[f\cdot\Delta g+g\cdot\Delta f+\Delta f\cdot\Delta g] \\ &= f\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x}+\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot g+\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x}\cdot\Delta x \\ &\to f(x)g'(x)+f'(x)g(x) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{f(x)}\right\} \\ &\qquad \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{1}{f+\Delta f}-\frac{1}{f}\right] \\ &= \frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{-\Delta f}{(f+\Delta f)f} \\ &= -\frac{1}{(f+\Delta f)f}\frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &\to -\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} \\ &\qquad \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f+\Delta f}{g+\Delta g}-\frac{f}{g}\right] \\ &= \frac{1}{\Delta x}\frac{g\Delta f-f\Delta g}{(g+\Delta g)g} \\ &= \frac{1}{(g+\Delta g)g}\cdot\left\{\frac{\Delta f}{\Delta x}g-f\frac{\Delta g}{\Delta x}\right\} \\ &\to \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \end{aligned} \tag{5}$$

合成関数の微分

$$z=z(y), \qquad y=y(x)$$

のとき、

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\Delta z}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\Delta x \to 0$ として、

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dy}\times\frac{dy}{dx} \\ &= z'(y)\times y'(x) \end{aligned} \tag{6}$$

微分の定義にしたがって次の関数を x について微分せよ。

(1) $y = x^2 + 3x + 1$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^2+3(x+h)+1\}-\{x^2+3x+1\}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2+3h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} 2x+h+3\\ &= 2x+3\end{aligned}$$

(2) $y = (x+3)(x-1)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h+3)(x+h-1)-(x+3)(x-1)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+(2x+2)h}{h}\\ &= 2x+2\end{aligned}$$

(3) $y = \dfrac{1}{x+1}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h+1}-\frac{1}{x}}{h}$$

通分して、整理する:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+1)-(x+h+1)}{h(x+h+1)(x+1)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h+1)(x+1)}\\ &= -\frac{1}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

(4) $y = \dfrac{1+x}{x}$

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{x}+1\\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{\{\frac{1}{x+h}+1\}-\{\frac{1}{x}+1\}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(x+h)x}\\ &= -\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

(5) $y = x+2+\dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{\{x+h+2+\frac{1}{x+h}\}-\{x+2+\frac{1}{x}\}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h+\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(x+h)x+x-(x+h)}{(x+h)xh}\\ &= \frac{x^2-1}{x^2}\end{aligned}$$

(6) $y = (x+1)^3$

$$\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h+1)^3-(x+1)^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{(x+h+1)^2+(x+h+1)(x+1)+(x+1)^2\right\}\\ &= 3(x+1)^2\end{aligned}$$

[公式]

$$\frac{d}{dx}\{af(x)+bg(x)\} = af'(x)+bg'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\cdot g(x)\} = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{f(x)}\right\} = -\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

逆関数の微分

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

2.1.1 微分公式 (まとめ)

$$\begin{aligned}
\{af(x)+bg(x)\}' &= af'(x)+bg'(x) \\
\{f(x)\cdot g(x)\}' &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \\
\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' &= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}}
\end{aligned}$$

2.2 初等関数の微分

$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{7}$$

[証明]

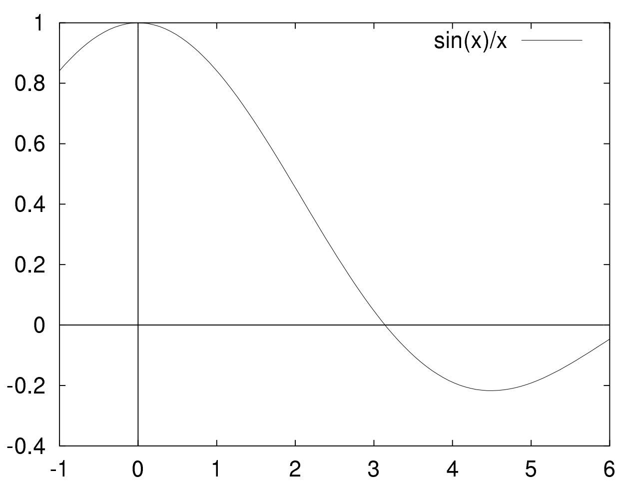
$(x^n)'$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\{(x+h)^n - x^n\} \\
=\ & (x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+(x+h)^{n-2}x^2+\cdots+x^{n-1} \\
\to\ & nx^{n-1}
\end{aligned}$$

と表される。[1]

三角関数

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin x}{x}\to 1 \tag{8}$$



$$\{\sin x\}' = \cos x \tag{9}$$

$$\{\cos x\}' = -\sin x \tag{10}$$

$$\{\tan x\}' = \frac{1}{\{\cos x\}^2} \tag{11}$$

[1] $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n) = a^n - b^n$

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \sin x\cdot\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\cdot\frac{\sin h}{h}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos h}{h} &= \frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h} \\
&= \sin\frac{h}{2}\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\
&\to 0, \qquad (h\to 0) \\
\frac{\sin h}{h} &\to 1, \qquad (h\to 0)
\end{aligned}$$

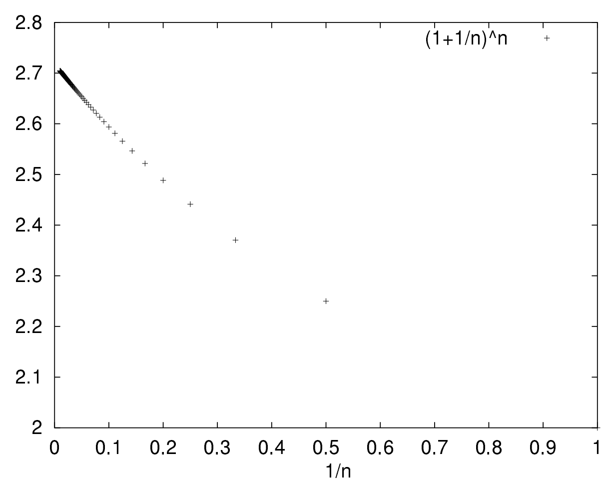
よって、

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\to\cos x, \quad (h\to 0)$$

指数関数

自然対数の底:

$$\begin{aligned}
e &= \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \\
&= \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} \\
&= 2.71828\cdots
\end{aligned}$$



$$\{e^{ax}\}' = ae^{ax} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{x+h}-e^x}{h} \\
&= \frac{e^h-1}{h}\cdot e^x
\end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{e^h-1}{h} = C$$

と置くと、

$$e^h = 1 + Ch$$

$Ch = t$ と置き換えると、

$$\begin{aligned} e &= (1+Ch)^{1/h} \\ &= \left\{(1+t)^{1/t}\right\}^C \\ &\to e^C, \quad (t \to 0) \end{aligned}$$

したがって、

$$C \to 1, \quad (h \to 0)$$

以上より、

$$\frac{e^{x+h} - e^h}{h} \to e^x, \quad (h \to 0)$$

対数関数 [2]

$$\{\log x\}' = \frac{1}{x} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\log(x+h) - \log x}{h} \\ =& \frac{1}{h} \log \frac{x+h}{x} \\ =& \frac{1}{h} \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ =& \frac{1}{x} \times \frac{x}{h} \log \left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ =& \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \end{aligned}$$

ここで、$K = \frac{x}{h}$ と置くと、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\log x) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{K \to \infty} \log(1 + \frac{1}{K})^K \\ &= \frac{1}{x} \log e \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

2.3 逆関数の微分

$$y = f(x)$$

を x について解き、x を y の関数としたのを $f(x)$ の逆関数と呼び、

$$x = f^{-1}(y)$$

と表す[3]。

[2] 自然対数: $\log x = \log_e x = \ln x$ とも書く。

[3] [注意] $f^{-1}(x)$ は $\{f(x)\}^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ ではないことに注意

逆関数の微分は次のような関係を満足する。

$$\begin{aligned} \frac{df^{-1}(y)}{dy} &= \frac{dx}{dy} \\ &= \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \\ &= \frac{1}{f'(x)} \end{aligned}$$

[例 1] 対数関数の微分

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log y$$

$$\frac{d \log y}{dy} = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{x}$$

[例 2] 逆関数の微分 ($\sin^{-1} x$) [4]

$$\begin{aligned} y &= \sin^{-1} x \\ x &= \sin y \\ \frac{dx}{dy} &= (\sin y)' = \cos y \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} \\ &= \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 y}} \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

2.4 合成関数の微分の例

[例 1]

$$y = e^{ax}$$

$t = ax$ と置いて、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \left(\frac{d}{dt} e^t\right) \cdot \left(\frac{d}{dx} ax\right) \\ &= e^t \times a \\ &= ae^{ax} \end{aligned}$$

[例 2]

$$y = \sin^2 x$$

$t = \sin x$ と置くと、

$$\begin{aligned} y &= t^2 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dt^2}{dx} = \frac{dt^2}{dt} \times \frac{dt}{dx} \\ &= (t^2)' \times (\sin x)' \\ &= 2t \times \cos x \\ &= 2 \sin x \times \cos x \end{aligned}$$

[4] $\sin^{-1}$: アークサインと読む。sin の逆関数

[例 3]

$$\begin{aligned}
y &= \cos x \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dx}\frac{1}{2}(e^{jx}+e^{-jx}) \\
&= \frac{1}{2}\left\{je^{jx}+(-j)e^{-jx}\right\} \\
&= \frac{j}{2}(e^{jx}-e^{-jx}) \\
&= \frac{j}{2}\times 2j\sin x \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

[例 4]

$$y = x^p$$

$t=\log y$ と置き、上式の両辺の対数を計算すると、

$$t = \log y = \log x^p = p\log x$$

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dy} &= (\log y)' = \frac{1}{y} \\
\frac{dt}{dx} &= (p\log x)' = \frac{p}{x} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{dt}{dx}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dt}{dx}}{\frac{dt}{dy}} \\
&= \frac{p/x}{1/y} = \frac{py}{x} = \frac{px^p}{x} \\
&= px^{p-1}
\end{aligned}$$

2.5 主な関数の微分

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= nx^{n-1} \\
(e^x)' &= e^x \\
(\sin x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= -\sin x \\
(\log x)' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

その他

$$\begin{aligned}
(1)' &= 0 \\
(\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
(\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

2.6 演習問題

次の関数を x について微分せよ。

1. $y = x^3 - x^2 + 4$
2. $y = (x+1)^3$
3. $y = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$
4. $y = \sqrt{x+2}$
5. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$
6. $y = (x+1)^2(x-2)^3$
7. $y = x\sqrt{x-1}$
8. $y = \sqrt[3]{x}$
9. $y = \sqrt{x^3}$
10. $y = (x^2+3)^2$
11. $y = \sqrt{x^2+1}$
12. $y = \frac{1}{x^2+3}$
13. $y = e^{2jx}$
14. $y = e^{2(x^2+1)}$
15. $y = xe^{-x}$
16. $y = \sin x + 3\cos x$
17. $y = x\sin x$
18. $y = \sin(x^2+2x+3)$
19. $y = \frac{1}{x}\sin x$
20. $y = \sin\frac{1}{x}$
21. $y = \log(x^2-1)$
22. $y = \log(1+\sqrt{x})$
23. $y = \frac{x}{x^2+1}$
24. $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$
25. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
26. $y = \frac{1}{\cos x}$
27. $y = \cos^{-1} x$
28. $y = \cos^{-1}(2x)$